

mgr inż. Łukasz BAŁ  
[lbak@prz.edu.pl](mailto:lbak@prz.edu.pl)  
Politechnika Rzeszowska

dr inż. Stanisław NOGA  
[noga@prz.edu.pl](mailto:noga@prz.edu.pl)  
Politechnika Rzeszowska

dr hab. inż. Andrzej SKRZAT  
[askrzat@prz.edu.pl](mailto:askrzat@prz.edu.pl)  
Politechnika Rzeszowska

prof. dr hab. inż. Feliks STACHOWICZ  
[stafel@prz.edu.pl](mailto:stafel@prz.edu.pl)  
Politechnika Rzeszowska

## ANALIZA DRGAŃ SITA PRZESIEWACZA WIBRACYJNEGO

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono analizę drgań własnych sita przesiewacza wibracyjnego, stosowanego do przesiewania naturalnie wilgotnych materiałów urobku skalnego. W analizie wykorzystano metodę analityczną oraz metodę numeryczną. W metodzie analitycznej ruch sita przesiewacza opisany został równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Rozwiązanie drgań własnych zostało wyprowadzone metodą rozdzielania zmiennych. Obliczenia numeryczne wykonano wykorzystując metodę elementów skończonych. Wyznaczone częstotliwości drgań własnych oraz postacie drgań własnych porównano z rozwiązaniem analitycznym. Zaprezentowane zostały uproszczenia modelu numerycznego oraz przeprowadzona została analiza wpływu materiału przesiewanego na częstotliwości drgań własnych sita.

**Słowa kluczowe:** przesiewanie, drgania poprzeczne, sito

## DYNAMIC ANALYSIS OF THE SIEVE IN VIBRATING SCREENER SYSTEM

**Summary:** Transversal vibrations of a screen for a fine granular material are studied using both analytical and numerical methods. In the analytical approach the motion of the screen is described by partial differential equations. The general solution of the screen free vibrations is derived from variables separation method. In the numerical computations the finite element method is applied. The screen compound geometry and the mass of the granular material are considered. Screen natural frequencies and natural mode shapes are determined. Numerical results are compared with the analytical solution. The screen geometry simplifications are proposed and validated by benchmark tests. The influence of the granular material on the screen natural frequencies is also investigated.

**Keywords:** screening, vibration, natural frequencies, sieve

### 1. WPROWADZENIE

Wysoka wydajność procesu przesiewania naturalnie wilgotnego urobku skalnego uzyskiwana jest obecnie dzięki zastosowaniu dużych, masywnych przesiewaczy. Wadą tych urządzeń są wysokie nakłady energii, konieczne nie tylko do przesiania materiału, ale również do wzbudzenia drgań masywnego układu. Niejednokrotnie ograniczona amplituda drgań wymaga zastosowania zasilania wodnego w celu zwiększenia efektywności procesu.

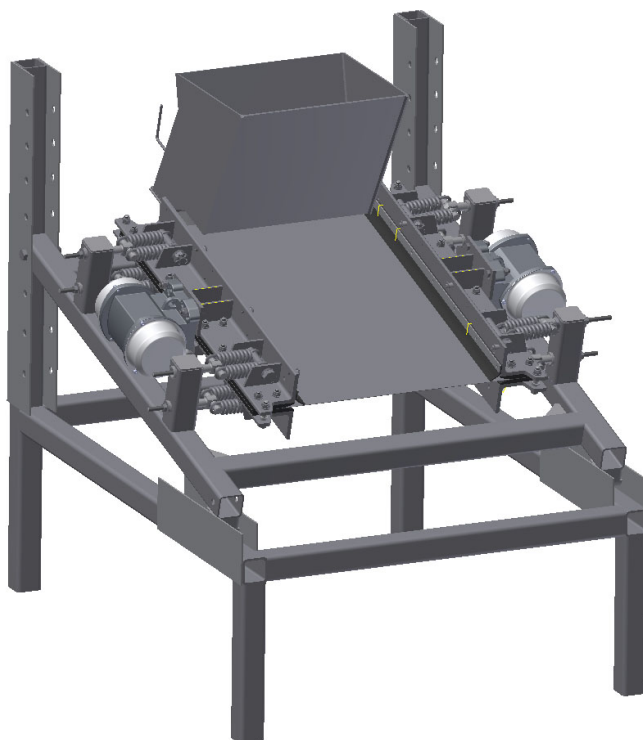
Zastosowanie urządzenia przesiewającego z bezpośrednim wzbudzeniem drgań sita poprzez parametryczne drgania rezonansowe daje możliwość wyeliminowania przedstawionych problemów [1]. Z tego powodu koniecznym jest dokładne określenie częstotliwości drgań własnych sita.

Rozwiązanie analityczne problemu drgań własnych poprzecznych możliwe jest do uzyskania jedynie dla modelu pełnej płyty (bez otworów). Stąd, biorąc pod uwagę złożoną geometrię sita pojawia się wiele pytań dotyczących możliwości uproszczenia modelu. Czy możliwe jest zastąpienie perforowanego sita pełną płytą bez utraty dokładności w wyznaczaniu częstości drgań własnych oraz postaci drgań? Jak zmodyfikować dane materiałowe aby uzyskać porównywalne wyniki dla modelu rzeczywistego i uproszczonego?

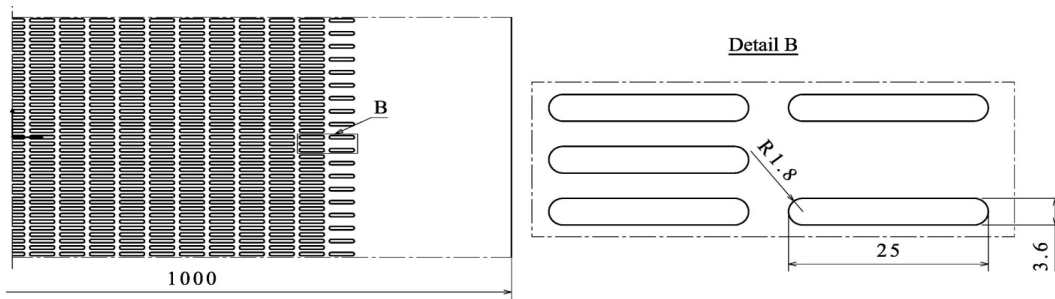
Odpowiedzią na postawione pytania jest opracowanie modelu, który posiada właściwości identyczne z modelem sita rzeczywistego. Porównanie wyników analizy numerycznej z rozwiązaniem analitycznym dla uproszczonego modelu daje możliwość zweryfikowania jego poprawności. Artykuł ten jest kontynuacją badań zaprezentowanych w pracy [2].

## 2. DRGANIA WŁASNE PŁYTY - ROZWIĄZANIE TEORETYCZNE

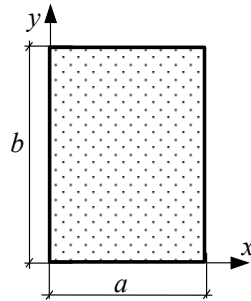
Obiektem badań jest układ drgający przesiewacza wibracyjnego służącego do przesiewania drobnoziarnistych materiałów urobku skalnego (Rys. 2.1). Sito przesiewacza stanowi prostokątna, perforowana płyta o wymiarach 0,85 x 1,5 m i grubości 1 [mm] oraz prostokątnych otworach, których rozmieszczenie i wymiary przedstawia rysunek 2.2. Rozwiązanie analityczne zagadnienia płyty swobodnie podpartej na wszystkich krawędziach jest znane z literatury przedmiotu [3]. W artykule przedstawiono rozwiązanie teoretyczne do wyznaczenia częstości drgań własnych oraz postaci drgań dla prostokątnej płyty, w której dwie przeciwległe krawędzie podparte są swobodnie, natomiast pozostałe dwie są swobodne. Przyjęty model płyty w kartezjańskim układzie współrzędnych przedstawia rysunek 2.3.



Rys.2.1. Widok ogólny układu przesiewającego



Rys.2.2. Widok geometrii sita i rozmieszczenia otworów



Rys.2.3. Model płyty swobodnie podpartej na dwóch krawędziach

Równanie różniczkowe drgań własnych, poprzecznych płyty jest równe:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho h} \nabla^4 w = 0 \quad (1)$$

gdzie:  $\rho$  - gęstość,  $h$  - grubość płyty,  $D$  - zastępcza sztywność giętna płyty.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

gdzie:  $E$  - zastępczy moduł Younga,  $\nu$  - współczynnik Poissona.

Warunki brzegowe dla przyjętego modelu płyty zostały zdefiniowane następująco:

$$w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0 \quad (3)$$

oraz

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=b} = 0 \quad (4)$$

Wykorzystując metodę rozdzielenia zmiennych funkcję  $w(x, y, t)$  przyjęto w postaci:

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t) \quad (5)$$

Po podstawieniu równania (5) do (1), (3) i (4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ \nabla^4 W(x, y) - p^4 W(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:  $\omega$  - częstość drgań własnych,  $p$  - wprowadzony parametr którego wartość określona jest wzorem:

$$p^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (7)$$

Stosując metodę Levy'ego dla przyjętych warunków brzegowych, częstości drgań własnych można uzyskać korzystając z poniższego równania:

$$\begin{aligned} \sin(\delta_1 b) \sinh(\delta_2 b) \left[ \delta_2^2 (p^2 - \alpha_m^2 (1 - \nu))^4 - \delta_1^2 (p^2 + \alpha_m^2 (1 - \nu))^4 \right] \\ - 2(\cosh(\delta_2 b) \cos(\delta_1 b) - 1) \delta_1 \delta_2 \left[ p^4 - \alpha_m^4 (1 - \nu)^2 \right]^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad \delta_1^2 = p^2 - \alpha_m^2, \quad \delta_2^2 = p^2 + \alpha_m^2 \quad (9)$$

Równanie (8) jest bardzo źle uwarunkowane numerycznie i charakteryzuje się silną nieliniowością. Niewielka zmiana parametru  $p$  może powodować gwałtowne skoki wartości po lewej stronie równania (8). Przykładowo jeżeli założymy, że funkcja  $f(p)$  jest równa lewej stronie równania (8) i dla przyjętej płyty  $f(5,21) = 3,24 \cdot 10^9$ , to  $f(5,22) = -1,69 \cdot 10^9$ . W przypadku, gdy parametr  $p < \alpha_m$ , wartość funkcji  $f(p)$  przyjmuje wartość zespoloną.

Wprowadzając parametry  $m$  oraz  $n$ , możliwe jest znalezienie parametru  $p$  tj.  $p = p_{mn}$  ( $m, n = 1, 2, 3, \dots$ ). Znając wartość parametru  $p$ , częstości drgań własnych można wyznaczyć z równania (7):

$$\omega_{mn} = p_{mn}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (10)$$

Postacie drgań własnych dla przyjętych warunków brzegowych zdefiniowane są następująco [3]:

$$\begin{aligned} W_{mn}(x, y) = \left\{ \left[ -(\cosh(\delta_2 b) - \cos(\delta_1 b)) \left[ p_{mn}^4 - \alpha_m^4 (1 - \nu)^2 \right] \left\{ \delta_1 \left[ p_{mn}^2 + \alpha_m^2 (1 - \nu) \right] \sinh(\delta_2 y) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \delta_2 \left[ p_{mn}^2 - \alpha_m^2 (1 - \nu) \right] \sin(\delta_1 y) \right\} + \left\{ \delta_1 \left[ p_{mn}^2 + \alpha_m^2 (1 - \nu) \right]^2 \sinh(\delta_2 b) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \delta_2 \left[ p_{mn}^2 - \alpha_m^2 (1 - \nu) \right]^2 \sin(\delta_1 b) \right\} \left[ p_{mn}^2 - \alpha_m^2 (1 - \nu) \right] \cosh(\delta_2 y) \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[ p_{mn}^2 + \alpha_m^2 (1 - \nu) \right] \cos(\delta_1 y) \right\} \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Wartości częstotliwości drgań własnych, wyznaczone analitycznie dla przyjętego modelu płyty przedstawione są w tabeli 2.1.

Tab. 2.1. Częstotliwości drgań własnych płyty

Postać drgań	Częstotliwość (s <sup>-1</sup> )
m=1, n=1	3.3516
m=1, n=2	4.1974
m=1, n=3	6.7790
m=1, n=4	11.1764
m=2, n=1	13.4999

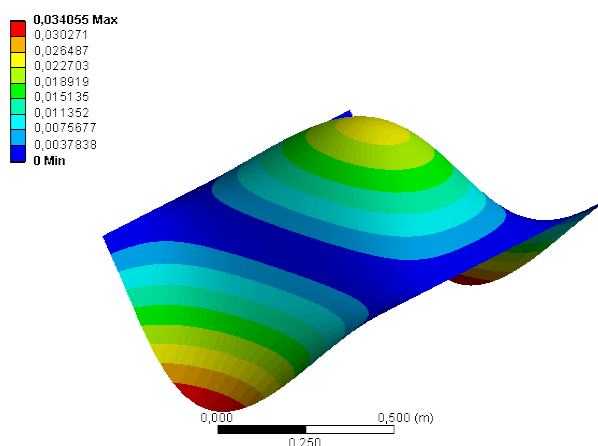
### 3. DRGANIA WŁASNE PŁYTY - ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE

Wartości częstotliwości drgań własnych dla płyty prostokątnej analizowanej w poprzednim rozdziale zostały również określone z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES) [4]. Obliczenia przeprowadzono niezależnie na dwóch komercyjnie dostępnych programach do obliczeń MES: ANSYS i ABAQUS. Zarówno w jednym jak i drugim programie płyta została zamodelowana jako siatka powłokowych elementów skończonych. Zastosowano tutaj prostokątne elementy najwyższego rzędu. Przykład rozwiązania uzyskanego w programie ANSYS przedstawia rysunek 3.1.

Wartości częstotliwości drgań własnych obliczone w programach ANSYS i ABAQUS zestawiono w tabeli 3.1. Przedstawione wyniki pokazują znakomitą dokładność oraz zbieżność wyników dla pierwszych trzech postaci z wartościami wyznaczonymi z zależności analitycznych. Dla kolejnych postaci drgań własnych dokładność obliczeń jest zadowalająca, mimo nieznacznie większego błędu obliczeń. Kolejne postacie nie są brane pod uwagę z punktu widzenia prowadzonych badań.

Tab. 3.1. Częstotliwości drgań własnych płyty (s<sup>-1</sup>) - rozwiązanie numeryczne

ANSYS	ABAQUS
3.2719	3.3514
4.0972	4.1959
6.6171	6.7751
10.9110	11.1710
13.1930	13.4990



Rys.3.1. Drgania własne płyty swobodnie podpartej - postać własna  $u_3$

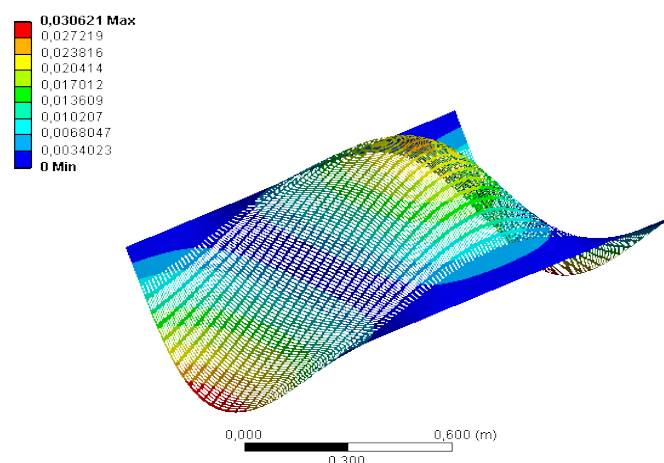
### 4. DRGANIA WŁASNE PŁYTY PERFOROWANEJ

Podobne obliczenia jak w przypadku pełnej płyty, przeprowadzone zostały dla modelu sita rzeczywistego. Problem ten nie może być jednak rozwiązany metodami analitycznymi. Do analizy numerycznej wykorzystano model o bardzo zagęszczonej siatce elementów skończonych. Została ona wygenerowana w taki sposób, aby największy element sita modelowany był minimum trzema warstwami elementów typu powłokowego. Rozmiar i czas obliczeń koniecznych do uzyskania wyniku, są znacznie większe w porównaniu z poprzednim modelem obliczeniowym. Etap generowania siatki elementów skończonych jest również znacznie dłuższy ze względu na złożoną geometrię sita, które zawiera znaczną liczbę otworów. Przykład rozwiązania uzyskanego w programie ANSYS przedstawiony jest na rysunku 4.1 (wyraźnie widoczne rozmieszczenie otworów sita).

Częstotliwości drgań własnych obliczone w programach ANSYS i ABAQUS przedstawiono w tabeli 4.1. Biorąc pod uwagę wartości częstotliwości drgań własnych dla płyty pełnej oraz perforowanej można zauważyć, że wyniki te są porównywalne i zbliżone do wartości uzyskanych w rozwiązaniu teoretycznym. Stąd pojawia się pytanie, czy możliwe jest zastosowanie pełnej płyty w modelowaniu sita rzeczywistego? Jest to bardzo ważne z punktu widzenia wielkości i całkowitego czasu przeprowadzanych obliczeń [5]. Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna wówczas, gdy dane materiałowe zostaną poprawnie zmodyfikowane. Na częstotliwość drgań własnych znacząco wpływają dwie stałe materiałowe: moduł Younga (określający sztywność materiału) oraz gęstość (określająca masę materiału). W przypadku tej samej geometrii i tych samych warunków brzegowych zachowanie stałego ilorazu  $E/\rho$  skutkuje uzyskaniem zgodnych wyników w obliczeniach. Jednak w rozpatrywanym przypadku geometrie płyty pełnej i płyty perforowanej są różne.

Tab. 4.1. Częstotliwości drgań własnych sita ( $s^{-1}$ ) - rozwiązanie numeryczne

ANSYS	ABAQUS
3.0745	3.1440
4.0239	4.0568
6.2825	6.2399
9.4290	9.2835
12.2850	12.5600



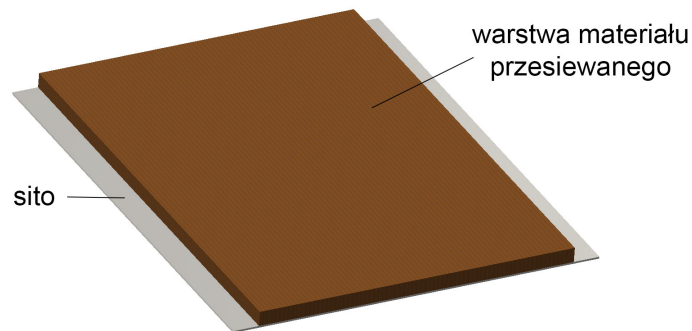
Rys.4.1. Drgania własne sita - postać własna  $u_3$

Model zastępczy do obliczeń numerycznych, w którym część perforowana sita została zastąpiona płytą pełną, powinien zachować stałą masę. Zatem gęstość płyty pełnej została zmodyfikowana. Wartość modułu Younga również została zmodyfikowana: wstępnie - proporcjonalnie do zmiany gęstości, natomiast w dalszej części analizy, dostosowana na

podstawie dokładności obliczenia częstotliwości drgań własnych dla pierwszej postaci drgań. Przeprowadzenie szeregu obliczeń pozwoliło na znalezienie optymalnej wartości modułu Younga ( $E = 1,06 \cdot 10^{11}$  Pa).

## 5. DRGANIA WŁANE SITA OBCIĄŻONEGO MATERIAŁEM

Kolejnym zagadnieniem poruszonym w przeprowadzonych badaniach są drgania własne płyty perforowanej (sita) obciążonej masą materiału przesiewanego. W tym celu powierzchnię sita pokryto warstwą "materiału przesiewanego" (rys. 5.1).



Rys.5.1. Model obliczeniowy sita z nałożoną warstwą materiału przesiewanego

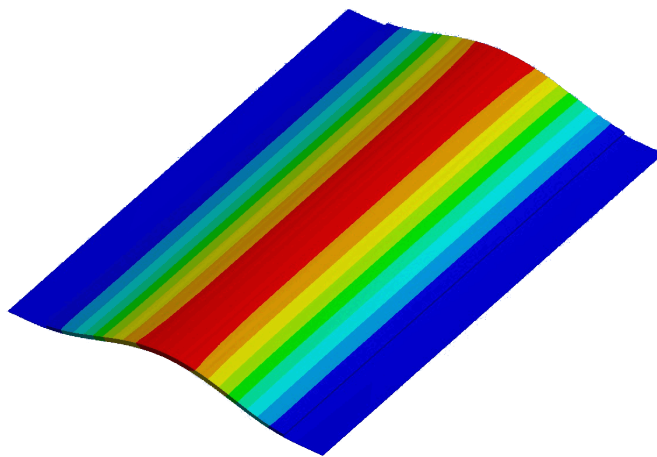
Obliczenia przeprowadzone zostały w programie ANSYS. Na sito (model powłokowy) nałożono masę kamieni (model bryłowy), natomiast kontakt pomiędzy elementami założono jako "bonded". Dzięki temu oba zamodelowane obiekty przemieszczają się wspólnie na kierunku poprzecznym. Zaprezentowana analiza to pierwsze podejście jakie można wykonać w celu określenia wpływu masy przesiewanego materiału na częstotliwości drgań własnych sita [6]. Zastosowany model numeryczny jest jednym z najprostszych jaki można wykorzystać do tego typu analizy. Dane materiałowe materiału przesiewanego zostały określone w taki sposób, aby zminimalizować sztywność nałożonej masy (wartość modułu Younga na poziomie tysięcy Pa) oraz odzwierciedlić masę materiału przesiewanego (gęstość nałożonej masy równa gęstości przesiewanego materiału). Przedstawiony model nie uwzględnia czasowego kontaktu materiału z sitem (tylko część materiału styka się w danej chwili z sitem podczas przesiewania), jak również nie umożliwia przejścia ziaren materiału przez otwory sita.

Głównym celem przedstawionej analizy jest określenie wpływu masy urobku skalnego na częstotliwości drgań własnych sita. Wyniki z przeprowadzonej analizy zestawiono w tabeli 5.1. Jak przewidywano, częstotliwości drgań własnych zmniejszyły się z powodu zwiększenia wartości drgającej masy. Pomimo zastosowania znacznie uproszczonego modelu wynik symulacji numerycznej są obiecujące, lecz powinny zostać jeszcze zweryfikowane eksperymentalnie.

Tab. 5.1. Częstotliwości drgań własnych ( $s^{-1}$ ) - sito z kruszywem

Postać drgań	Częstotliwość
1	1.3264
2	1.7369
3	2.6806
4	3.9253
5	5.3594





Rys.5.2. Drgania własne sita z kruszywem - postać własna  $u_1$

## 6. WNIOSKI

Przedstawione w artykule analizy numeryczne są częścią badań dotyczących zwiększenia wydajności przesiewania poprzez wykorzystanie rezonansu parametrycznego sita. Informacje dotyczące wartości częstotliwości drgań sita uzyskanych za pomocą przedstawionych modeli obliczeniowych pozwolą na łatwe oszacowanie częstotliwości wymuszenia wzbudników drgań, przy czym powinna być ona dwukrotnie większa od częstotliwości drgań własnych sita. Z punktu widzenia pracy urządzenia pod uwagę brane jest kilka pierwszych postaci drgań.

Zaprezentowane rozwiązanie analityczne zagadnienia drgań własnych płyty swobodnie podpartej może być z powodzeniem wykorzystane do analizy drgań własnych płyty perforowanej, nie tracąc na dokładności obliczeń.

Alternatywnym sposobem analizy numerycznej drgań własnych sita jest zastosowanie modelu płyty pełnej o zmodyfikowanych danych materiałowych (moduł Younga i gęstość). Zastosowanie modelu pełnej płyty znacznie upraszcza model numeryczny i skraca czas obliczeń.

Przedstawiony model numeryczny do analizy wpływu masy kruszywa na częstotliwości drgań własnych jest jednym z najprostszych i wykorzystany jest we wstępnej fazie analizy. Badania eksperymentalne, które zostaną przeprowadzone w przyszłości pozwolą na stwierdzenie poprawności i możliwość ulepszenia zaprezentowanych modeli obliczeniowych.

## LITERATURA

- [1] Slepyan V. I., Loginov I. G., Slepyan L. I.: *The method of resonance excitation of a vibrating sieve and the vibrating screen for its implementation*, Ukrainian patent on invention No. 87369, 2009.
- [2] Bąk Ł., Noga S., Skrzat A., Stachowicz F.: *Dynamic analysis of vibrating screener system*, J. Phys. Conf. Ser. 451, 2013.
- [3] Rao S.: *Vibration of Continuous Systems*, Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2007.
- [4] Friswell M. and Mottershead J.: *Finite element model updating in structural dynamics*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [5] Leissa A. W.: *Vibration of plates*, NASA SP 160, US Government Printing Office, 1993.
- [6] Bogacz R., Noga S.: *Free vibration of the Timoshenko beam interacting with Winkler foundation*, Proceedings of the XVIIIth, PTSK Conference pp 14-17, 2011.