

# Szacowanie niepewności pomiaru w budowie maszyn. Dyskusja budżetu niepewności

## Evaluation of measurement uncertainty in mechanical engineering. Discussion of uncertainty budget

WŁADYSŁAW JAKUBIEC  
WOJCIECH PŁOWUCHA  
PAWEŁ ROSNER\*

DOI: 10.17814/mechanik.2016.12.568

Omówiono elementy budżetu niepewności pomiaru. Wskazano źródła informacji o składowych niepewności i powody utożsamiania granicznego błędu dopuszczalnego wskazań z niepewnością pomiaru. Wyjaśniono szczegółowo pochodzenie współczynników umożliwiających przeliczanie przedziału możliwych błędów na odchylenie standardowe składowej niepewności pomiaru związanej z tym błędem.

**SŁOWA KLUCZOWE:** niepewność pomiaru, rozkład prawdopodobieństwa, wariancja, budżet niepewności

*Components of the uncertainty budget are discussed. The sources of information on component uncertainties are pointed out. Reasons for identifying the maximum permissible error of indication with measurement uncertainty are explained. The origins of coefficients enabling calculation of standard uncertainty from the possible range of errors are explained in detail.*  
**KEYWORDS:** measurement uncertainty, probability distribution, variance, uncertainty budget

Budżet niepewności pomiaru zawiera zwykle kilka składowych niepewności, które grupuje się ze względu na źródła ich powstawania, tj. przyrząd pomiarowy, warunki środowiskowe, osobę wykonującą pomiar czy mierzony przedmiot. W przypadku prostych przyrządów używanych w przemyśle budowy maszyn wpływ wykonującej pomiar jest zwykle szacowany na podstawie wyników specjalnego eksperymentu (metoda typu A), natomiast wpływ przyrządu pomiarowego, warunków środowiskowych i mierzonego przedmiotu – na podstawie danych katalogowych i literaturowych (metoda typu B).

### Składowe niepewności pochodzące od sprzętu pomiarowego

W artykule [1] przedstawiono schemat postępowania przy szacowaniu niepewności pomiarów na przykładzie pomiaru mikrometrem. W budżecie niepewności – jako charakterystyki metrologiczne mikrometru – oprócz błędu wskazania (ograniczonego przez  $MPE_{ML}$ ) występują jeszcze błędy (odchyłki) powierzchni pomiarowych: błąd płaskości (dwukrotnie, ograniczony przez  $MPE_{MF}$ ) i błąd równoległości (ograniczony przez  $MPE_{MP}$ ). Przyjęte w budżecie wartości oraz oznaczenia charakterystyk zaczerpnięto z PN-EN ISO 14253-2:2011 [2]. Takie same wartości występują w formalnie nieaktualnych już dokumentach: normie PN-82/M-53200 [3] i Dzienniku Urzędowym Miar i Probiernictwa nr 12/96 [4]. Warto jednak pamiętać, że zawartość merytoryczna tych dokumentów nadal jest aktualna, ponieważ wyprodukowane i wzorcowane według nich mikrometry są jeszcze w użyciu. Do wyznaczenia

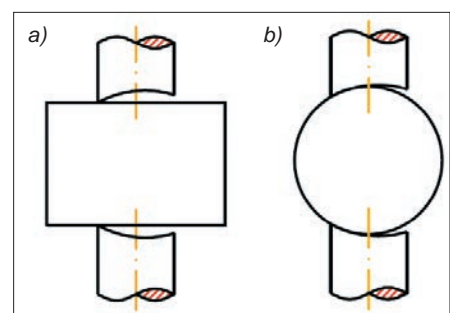
błędu wskazań stosuje się płytki wzorcowe. Odchyłki płaskości powierzchni pomiarowych wrzeciona i kowadełka określa się na podstawie pomiaru za pomocą szkła interferencyjnego płaskiego, a odchyłki równoległości – za pomocą kompletu szkieł interferencyjnych płasko-równoległych.

Obecne podejście do definiowania wymagań w zakresie dokładności sprzętu pomiarowego podano w normie PN-EN ISO 14978:2007 [5]. Sprzęt pomiarowy (czyli przyrządy, wzorce miary i urządzenia pomocnicze) pod względem dokładności opisują jego charakterystyki metrologiczne. Sprzęt do pomiarów geometrycznych ma zwykle więcej niż jedną charakterystykę metrologiczną i dla każdej powinien mieć określone wymaganie metrologiczne w postaci błędu granicznego dopuszczalnego ( $MPE$ ) lub wartości granicznych dopuszczalnych ( $MPL$ ). Normy dotyczące konkretnego sprzętu pomiarowego określają charakterystyki metrologiczne (ważne dla typowego, powszechnego zastosowania tego sprzętu), lecz nie podają dla nich żadnych wartości liczbowych. Wyjątek stanowią normy dotyczące płytek wzorcowych [6] i sprawdzianów do wałków i otworów [7].

Zgodnie z aktualnym podejściem wymagania metrologiczne (czyli wartości  $MPE$  i  $MPL$  dla wskazanych we właściwej normie charakterystyk) wobec nowego sprzętu określa producent – w katalogach lub dołączonej do sprzętu dokumentacji. Użytkownik może te wymagania zmienić w zależności od potrzeb (choć najczęściej pozostawia je bez zmian) – na łagodniejsze, a w szczególnych sytuacjach na ostrzejsze.

Nie wszystkie charakterystyki występujące w normie są istotne dla konkretnego pomiaru, natomiast dla konkretnego zastosowania mogą być istotne wymagania w odniesieniu do charakterystyk metrologicznych niezdefiniowanych w normie. Przykładowo, jeśli mierzony jest przedmiot płaski (a nie wałek – jak w [2]), to w budżecie niepewności nie wystąpią składowe niepewności od odchyłek płaskości i równoległości powierzchni pomiarowych mikrometru. Wynika to z faktu, że warunki pomiaru takiego przedmiotu są takie same jak w czasie wzorcowania mikrometru z użyciem płytek wzorcowych (rys. 1).

Wprowadzona w 2010 r. norma dotycząca mikrometrów (PN-EN ISO 3611:2010) [8] ustala inne niż w jej wcześniejszej wersji następujące charakterystyki metrologiczne:



Rys. 1. Charakterystyki metrologiczne mikrometru mające wpływ na niepewność pomiaru:  
a) wzorcowanie i pomiar przedmiotu płaskiego,  
b) pomiar wałka

\* Dr hab. inż. Władysław Jakubiec prof. ATH (wjakubiec@ath.bielsko.pl), dr inż. Wojciech Płowucha (wpłowucha@ath.bielsko.pl), mgr inż. Paweł Rosner (prosnier@ath.bielsko.pl) – Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

- błąd wskazania przy pełnym styku powierzchni (ograniczony przez  $MPE_p$ ),
- powtarzalność (ograniczona przez  $MPE_R$ ),
- błąd wskazania przy częściowym styku powierzchni (ograniczony przez  $MPE_E$ ),
- nacisk pomiarowy (ograniczony przez  $MPL$ ).

W tym podejściu trzy pierwsze charakterystyki – czyli błędy wskazania przy pełnym styku  $J$  i częściowym styku  $E$  oraz powtarzalność – są wyznaczone na podstawie „pomiaru” płytek wzorcowych. Przez powtarzalność rozumie się tutaj (inaczej niż zwykle) właściwość przyrządu pomiarowego polegającą na tym, że jego wskazania są zbliżone do siebie w przypadku wielokrotnego pomiaru tej samej wielkości w tych samych warunkach (przy zapewnieniu: zredukowanych do minimum zmian powodowanych przez obserwatora, identycznej procedury pomiarowej, tego samego obserwatora, tego samego urządzenia pomiarowego, tego samego miejsca, powtarzania w ciągu krótkiego okresu).

W podsumowaniu artykułu [1] znalazło się stwierdzenie, że jedną z dwóch najistotniejszych składowych niepewności jest błąd wskazań. Do budżetu niepewności wzięto tam wartość graniczną błędu, a więc taką, która jest spełniona dla wszystkich, nawet najbardziej zużytych (aczkolwiek spełniających wymagania) mikrometrów. Jeżeli otrzymana wartość niepewności jest dla określonych celów zbyt duża, być może wystarczy używanie wyselekcjonowanego mikrometru, dla którego wartość błędu wskazań jest wyraźnie mniejsza od użytej do analizy. Jeżeli z kolei otrzymana wartość niepewności jest z punktu widzenia potrzeb bardzo niska, to zamiast mikrometru można użyć innego przyrządu (np. summiarki cyfrowej) albo ułatwić sobie pomiar przez odczytanie wskazań z mniejszą dokładnością (zwiększy się wtedy występująca w budżecie składowa od rozdzielczości).

W tabelicy podano przykładowy budżet niepewności dla pomiaru summiarką cyfrową wymiaru zewnętrznego o wartości nominalnej 100 mm. Jako maksymalną wartość błędu wskazań przyjęto najczęściej deklarowaną przez producentów summiarek wartość  $MPE = 30 \mu\text{m}$ . Jako wartości maksymalne składowych niepewności od płaskości i równoległości szczęk przyjęto wartości występujące w Dzienniku Urzędowym Miar i Probiernictwa nr 6/96 [9] i stosowane jako wartości graniczne ustalone przez użytkowników. Przyjęcie w budżecie, że wartość standardowej niepewności pomiaru od powtarzalności jest równa zeru albo pominięcie tej składowej w budżecie odpowiada

**TABLICA. Budżet niepewności pomiaru summiarką cyfrową**

Składowa niepewności	Metoda	Wartość maksymalna $a$ , $\mu\text{m}$	Rozkład	Mnożnik	Niepewność standardowa $u$ , $\mu\text{m}$
Od błędu wskazań	B	30	normalny	0,50	15,0
Od płaskości szczęki 1	B	5	jednostajny	0,58	2,9
Od płaskości szczęki 2	B	5	jednostajny	0,58	2,9
Od równoległości szczęk	B	10	jednostajny	0,58	5,8
Od powtarzalności	A	–	–	–	0
Od rozdzielczości	B	5	jednostajny	0,58	2,9
Od różnicy temperatury	B	5,75	V	0,71	4,1
Od odchyłki kształtu przedmiotu	B	10	normalny	0,50	5
Niepewność standardowa złożona $u_c$ , $\mu\text{m}$					18
Niepewność rozszerzona ( $k = 2$ ) $U$ , $\mu\text{m}$					36

bardzo typowej sytuacji, że w czasie powtarzania pomiaru w dobrych warunkach uzyskuje się identyczne wyniki. W budżecie występuje tylko jedna składowa błędu temperaturowego obliczona przy założeniu, że przedmiot jest stalowy, a maksymalna różnica temperatury przedmiotu i przyrządu wynosi  $5^\circ\text{C}$ . Drugą składową błędu temperaturowego pominięto, pamiętając, że jej wartość jest najczęściej znacznie mniejsza od pierwszej.

Warto zauważyć, że dominujący wpływ na końcowy wynik ma składowa od błędu wskazań. Oznacza to, że pominięcie wszystkich pozostałych składowych powoduje, że oszacowana rozszerzona niepewność pomiaru jest równa wartości granicznej błędu wskazań i wynosi  $30 \mu\text{m}$ , czyli jest zaniżona jedynie o ok. 20%.

W przypadku summiarek z noniuszem najczęściej się zakłada, że graniczny błąd wskazań  $MPE = 100 \mu\text{m}$ , więc przyjęcie (bez tworzenia budżetu) niepewności rozszerzonej pomiaru  $U$  na poziomie  $100 \mu\text{m}$  jest tym bardziej uzasadnione.

Niekiedy w podobnych przypadkach utożsamia się błąd graniczny dopuszczalny wskazań przyrządu z niepewnością pomiaru tym przyrządem, nie dociekając, co jest przedmiotem pomiaru ani w jakich warunkach i przez kogo pomiar jest wykonywany.

### Rozkłady prawdopodobieństwa w budżecie niepewności

W przypadku szacowania składowych niepewności metodą typu B należy określić graniczną wartość błędu i rodzaj (charakter, postać) rozkładu prawdopodobieństwa tego błędu. Na podstawie rodzaju rozkładu prawdopodobieństwa określa się mnożnik pozwalający na „przeliczenie” wartości granicznej błędu na standardową niepewność pomiaru (odchylenie standardowe). W normie [2] proponuje się branie pod uwagę jedynie trzech rodzajów rozkładów: normalnego ( $b = 0,5$ ), jednostajnego ( $b = 0,6$ ) i V ( $b = 0,7$ ). W innych dokumentach [10, 11] pojawiają się również inne rozkłady, np. trapezowy, jednostajny z niedokładnie określonymi/rozmytymi granicami, arcusa sinusa (rozkład U) czy t.

Szacowanie niepewności metodą typu B jest oparte na centralnym twierdzeniu granicznym. Zastosowanie tego twierdzenia wymaga znajomości odchyłeń standardowych (lub wariancji) składowych niepewności. Wariancję  $\text{Var}(X)$  zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie prawdopodobieństwa określonym za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f(x)$  oblicza się według wzoru:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

gdzie  $E(X)$  jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej  $X$ .

W przypadku rozkładów symetrycznych względem osi  $y$  (a tylko takie występują w analizie niepewności pomiaru) wartość oczekiwana jest równa zeru. Wobec tego wzór upraszcza się do postaci:

$$\text{Var}(X) = 2 \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx$$

Jeżeli zmienna losowa przyjmuje wyłącznie wartości z przedziału  $(-a, a)$  – tak jest m.in. w przypadku rozkładu jednostajnego, trójkątnego i V – wtedy poza tym przedziałem funkcja gęstości przyjmuje wartości równe zeru i wzór upraszcza się do postaci:

$$\text{Var}(X) = \int_{-a}^a x^2 f(x) dx = 2 \int_0^a x^2 f(x) dx$$

Wariancję poszczególnych rozkładów można obliczyć, gdy zna się wzory na funkcje gęstości prawdopodobieństwa. I tak:

- dla rozkładu jednostajnego:

$$f(x) = \frac{1}{2a}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2}{3}, \quad s = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0,577a$$

- dla rozkładu trójkątnego:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{a^2} & \text{dla } x \in (-a, 0) \\ \frac{-x+a}{a^2} & \text{dla } x \in (0, a) \end{cases}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2}{6}, \quad s = \frac{a}{\sqrt{6}} \cong 0,408a$$

- dla rozkładu V:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{a^2} & \text{dla } x \in (-a, 0) \\ \frac{x}{a^2} & \text{dla } x \in (0, a) \end{cases}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{a^2}{2}, \quad s = \frac{a}{\sqrt{2}} \cong 0,707a$$

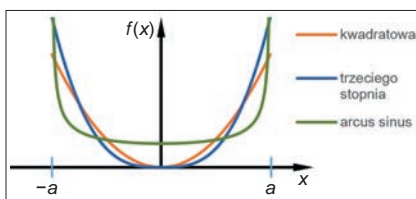
Pod pojęciem rozkładu U można rozumieć różne rozkłady prawdopodobieństwa, zwłaszcza opisane za pomocą funkcji kwadratowej albo funkcji trzeciego stopnia (rys. 2):

$$f(x) = \frac{3x^2}{2a^3}; \quad \text{Var}(X) = \frac{a^2}{5/3}; \quad s = \frac{a}{\sqrt{5/3}} \cong 0,775a$$

$$f(x) = \frac{2|x^3|}{a^4}; \quad \text{Var}(X) = \frac{a^2}{3/2}; \quad s = \frac{a}{\sqrt{3/2}} \cong 0,816a$$

Najczęściej jednak przez to pojęcie rozumie się rozkład arcusa sinusa (nazwa rozkładu pochodzi od funkcji opisującej dystrybuantę rozkładu) (rys. 2):

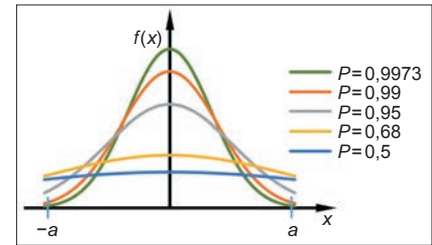
$$f(x) = \frac{1}{\pi a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}; \quad \text{Var}(X) = \frac{a^2}{2}; \quad s = \frac{a}{\sqrt{2}} \cong 0,707a$$



Rys. 2. Wykresy funkcji gęstości trzech rozkładów antymodalnych, które można nazwać rozkładami U

Omówione przykładowe rozkłady opisują zmienne losowe, które nie przyjmują wartości spoza przedziału  $(-a, a)$ . Rozkład normalny opisuje zmienne losowe, które teoretycznie przyjmują dowolne wartości, czyli wartości z przedziału  $(-\infty, \infty)$ , a praktycznie (z prawdopodobieństwem  $P = 0,9973$ ) – wartości z przedziału  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ , gdzie  $\mu$  i  $\sigma$  to parametry tego rozkładu, przy czym  $\mu$  można utożsamiać z wartością oczekiwaną  $E(X)$  lub wartością średnią  $\bar{x}$ , a  $\sigma$  z odchyleniem standardowym  $s$ . Dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym symetrycznym

Rys. 3. Wykresy funkcji gęstości rozkładu normalnego odpowiadające założeniu, że znane jest prawdopodobieństwo, iż zmienna losowa przyjmie wartości z przedziału  $(-a, a)$



względem osi  $y$  ( $\mu = 0$ ) można więc pokazać związek między prawdopodobieństwem  $P$  (że zmienna ta zawiera się w przedziale  $(-a, a)$ ) a wartością odchylenia standardowego  $s$ . Przykłady:

- $a = 3s$  albo  $s = 0,33a$  dla  $P = 0,9973$ ,
- $a = 2,58s$  albo  $s = 0,39a$  dla  $P = 0,99$ ,
- $a = 2s$  albo  $s = 0,5a$  dla  $P = 0,954$ ,
- $a = s$  dla  $P = 0,68$ ,
- $a = 0,68s$  albo  $s = 1,47a$  dla  $P = 0,5$ .

W razie użycia jako modelu rozkładu normalnego można więc brać pod uwagę różne przypadki, dla których znana jest wartość  $a$  definiująca przedział błędów i prawdopodobieństwo, że błąd znajduje się w tym przedziale. Najczęstsze są dwa przypadki:

- gdy wartość graniczna  $a$  może zostać przekroczona w ok. 5% przypadków (na wartość  $a$  składają się wtedy dwa odchylenia standardowe),
- gdy wartość graniczna  $a$  może zostać przekroczona w 0,27% przypadków (na wartość  $a$  składają się wtedy trzy odchylenia standardowe (rys. 3)).

## Podsumowanie

Budżet niepewności pozwala na dokładną analizę źródeł niepewności pomiaru. Poszczególne składowe niepewności mogą być oszacowane metodą A lub metodą B. Grupowanie składowych niepewności w budżecie według źródła pochodzenia ułatwia określenie grupy o największym znaczeniu. Oszacowanie wpływu operatora przeprowadza się metodą typu A na podstawie wyników eksperymentu.

Wykorzystane w przykładzie rozkłady prawdopodobieństwa pozwalają na modelowanie metodą typu B wpływu większości składowych niepewności w typowych zadaniach pomiarowych z obszaru budowy maszyn.

## LITERATURA

- Jakubiec W., Płowucha W., Rosner P. „Szacowanie niepewności pomiaru w budowie maszyn. Budżet niepewności”. *Mechanik*. Nr 12 (2016).
- PN-EN ISO 14253-2:2011 Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Kontrola wyrobów i wyposażenia pomiarowego za pomocą pomiarów. Część 2: Wytyczne szacowania niepewności pomiarów w GPS, przy wzorcowaniu wyposażenia pomiarowego i sprawdzaniu wyrobów.
- PN-82/M-53200 Narzędzia pomiarowe. Przyrządy mikrometryczne. Wymagania (zgodna z ISO 3611:1978 Micrometer calipers for external measurement; zastąpiona przez PN-EN ISO 3611:2010).
- Dziennik Urzędowy Miar i Probiernictwa nr 12/96.
- PN-EN ISO 14978:2007 Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Pojęcia ogólne i wymagania dotyczące sprzętu pomiarowego do GPS.
- PN-EN ISO 3650:2000P Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Wzorce długości. Płytki wzorcowe.
- ISO 1938 Geometrical product specifications (GPS). Dimensional tolerancing. Limit gauges and gauging of linear size.
- PN-EN ISO 3611:2010 Specyfikacje geometrii wyrobów (GPS). Przyrządy pomiarowe. Mikrometry zewnętrzne. Charakterystyki konstrukcyjne i metrologiczne.
- Dziennik Urzędowy Miar i Probiernictwa nr 6/96.
- JCGM 100:2008 (GUM 1995 with minor corrections) Evaluation of measurement data. Guide to the expression of uncertainty in measurement.
- JCGM 101:2008 Evaluation of measurement data. Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”. Propagation of distributions using a Monte Carlo method.