

# Komputerowe wspomaganie projektowania zespolonych stropów żelbetowych na bazie wiotkich płyt prefabrykowanych

Computer-aided design of composite slabs of reinforced concrete realized on the basis of slender slabs

PIOTR BIERANOWSKI \*

Materiały z XX SKWPIE, Jurata 2016 r.  
DOI: 10.17814/mechanik.2016.7.105

W publikacji zaprezentowano autorski raport z doświadczeń przy projektowaniu konstrukcji zespolonych stropów żelbetowych, który uwzględnia metody wytwarzania wiotkich płyt w zakładach prefabrykacji.

**SŁOWA KLUCZOWE:** konstrukcje żelbetowe, stropy zespolone, prefabrykacja

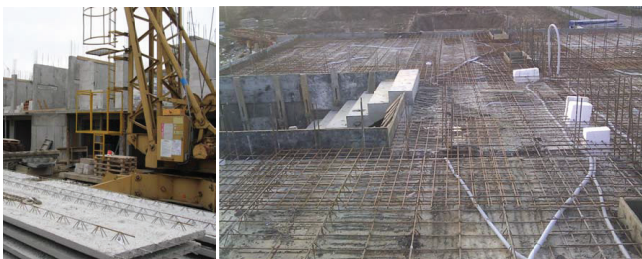
*The publication presents the original report from the experience in the design of composite slabs of reinforced concrete, which takes into account the method of manufacturing slender plate in the precast.*

**KEYWORDS:** concrete structures, composite ceiling, prefabrication

Obecnie szeroko w budownictwie rozpowszechniły się prefabrykowane elementy wiotkie – płytowych stropów zespolonych [2]. Wielkowymiarowe elementy stropów zespolonych (rys. 2) mają grubość od 5 do 7 cm. Ich szerokość, wynikająca z ograniczenia skrajni przewozowej, nie przekracza 2,5 m. Długość prefabrykatów wynosi od 3,0÷7,2 m. Transport i montaż płyt wiotkich ułatwiają trójkątne przestrzenne kratownice nośne (rys. 1, 2) wykonane z prętów zbrojeniowych. Przykład zbrojenia płyty filigran przedstawiono na rys. 1. Płytowe stropy zespolone charakteryzują się wyprowadzoną ponad płytę kratownicą, której głównym zadaniem jest zespolenie warstwą betonu na-



Rys. 1. Konstruowanie szkieletu wiotkiej płyty na bazie wkładek zbrojeniowych oraz przestrzennych kratowniczek. Po lewej przygotowany szkielet zbrojeniowy gotowy do umieszczenia w deskowaniu i wypełnieniu mieszanką betonową. Po prawej widoczne wycięcie otworu na pion komina wentylacyjnego (fot. archiwum autora)



Rys. 2. Montaż wiotkich płyt żelbetowych. Po lewej płyty gotowe do ułożenia na stropie, po prawej już zamontowane na ściany nośne widoczne w budowanej zbrojeniu górne płyt w postaci siatek podporowych (fot. archiwum autora)

noszoną na budowie. Wymiarowanie konstrukcji odbywa się zgodnie z algorytmami zawartymi w [1, 2, 3, 8].

**Komputerowe wspomaganie projektowania w aspekcie wymiarowania konstrukcji żelbetowej płyty zespolonej stropu – program komputerowy ABC Płyta**

Macierz sztywności struktury opisuje warunki podporowe i brzegowe [4, 5, 6, 7]. Warunki podporowe są zadawane w postaci elementów podporowych o macierzy sztywności.

Po przyjęciu elementów podporowych otrzymuje się wartości reakcji, które można wyrazić wzorem ważnym dla każdego węzła podporowego  $i$ :

$$\{R_i\} = \begin{Bmatrix} R \\ Mu_x \\ Mu_y \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} k_z & 0 & 0 \\ 0 & k_x & 0 \\ 0 & 0 & k_y \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} w_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}_i \quad (1)$$

Siły przekrojowe dla elementu płytowego opisane są trzema momentami jednostkowymi: dwoma gnącymi i jednym skręcającym – obliczonym po wyznaczeniu przemieszczeń węzłowych:

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = [D][B]\{q\}^e \quad (2)$$

Wyróżnia się następujące rodzaje obciążenia: węzłowe, liniowe, powierzchniowe, termiczne oraz wstępne przemieszczenia podporowe. Siły węzłowe są bezpośrednio wprowadzane do końcowego układu równań:

$$[K]\{q\} = [P] \quad (3)$$

Siły liniowe i powierzchniowe są definiowane jako układ sił węzłowych, składających się z sił pionowych o kierunku  $Z$  i momentów węzłowych. Wartości obciążeń węzłowych opisuje zależność:

$$\{P\}_e = - \int_A [N]^T q dA \quad (4)$$

gdzie:  $[N]$  – funkcja kształtu elementu trójkątnego dla sił powierzchniowych lub dla elementu belkowego – sił liniowych.

Obciążenie termiczne, które w płycie stanowi gradient termiczny na grubości płyty, określane jest zastępczą siłą węzłową wg wzoru:

\* Mgr inż. Piotr Bieranowski (piotr.bieranowski@uwm.edu.pl) – Katedra Mechaniki i PKM, Wydział Nauk Technicznych, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

$$\{P\}_e^t = - \int_A [B]^T [D] \{\alpha \Delta T / t\} dA \quad (5)$$

gdzie:  $\alpha$  – współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej,  $\Delta T / t$  – gradient termiczny.

Przemieszczenie wstępne w podporach zapisywane jest jako odpowiedni wyraz prawej strony końcowego układu równań i przyjmuje postać:

$$P_i = K_{ii} \delta \quad (6)$$

gdzie:  $K_{ii}$  – wyraz z przekątnej macierzy sztywności po uwzględnieniu elementów podporowych, odpowiadający stopniowi swobody ze wstępnym przemieszczeniem;  $\delta$  – zadane przemieszczenie wstępne w podporach.

Macierz sztywności  $[D]$  dotyczy zagadnień izotropowych. Inżynierska praktyka napotyka często stany ortotropowe, gdzie sztywności giętne na kierunkach  $X$  i  $Y$  mogą się znacznie różnić. Sytuacja ta ma miejsce np. przy definicji stropów gęstożebrowych. Jeżeli nie są one zdefiniowane jawnie poprzez zadanie żeber w formie pogrubienia, macierz sztywności przyjmuje postać:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$D_{11} = \frac{Et_x^3}{12(1-\nu)}; \quad D_{22} = \frac{Et_y^3}{12(1-\nu)}; \quad (8 \div 11)$$

$$D_{12} = D_{21} = \nu \sqrt{D_{11} D_{22}}; \quad D_{33} = \frac{(1-\nu)}{2} \sqrt{D_{11} D_{22}}$$

gdzie:  $t_x$  – zastępcza grubość dla zginania na kierunku  $X$ ,  $t_y$  – zastępcza grubość dla zginania na kierunku  $Y$ .

Program ABC Płyta umożliwia przypisanie stopnia przenoszenia przez płytę momentów skręcających. Opisana zostaje korelacja wyrazu  $D_{33}$  macierzy sprężystości współczynnikiem  $f$ :

$$D_{33}^* = f D_{33} \quad (12)$$

gdzie:  $f$  – stopień przenoszenia momentu skręcającego;  $f \in (0, 1)$ .

Iteracja ugięcia płyty zarysowanej polega na modyfikacji wyrazów:

$$D_{11}^* = m_1 D_{11}; \quad D_{22}^* = m_2 D_{22} \quad (13)$$

Modyfikacja wyrażen poprzez zastosowanie współczynników  $m_1$  i  $m_2$  pozwala określić stopień zarysowania stref rozciąganych płyty oraz wielkość wpływów reologicznych. Wyznaczanie współczynników oparte jest na algorytmach zawartych w normie [8]. Wyrazy  $D_{12}$  i  $D_{21}$  są obliczane tak samo jak w przypadku płyty ortotropowej, natomiast wyraz  $D_{33}$  jest obliczany następująco:

$$D_{33} = \frac{(D_{11}^* + D_{22}^* - 2\nu \sqrt{D_{11}^* + D_{22}^*})}{4} \quad (14)$$

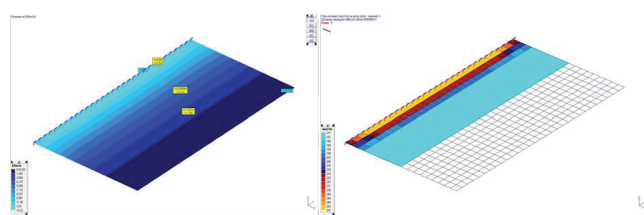
Zarysowania będą powiązane z kierunkami wpływu momentów gnących, stąd macierz sprężystości  $[D]$  jest wyznaczana pierwotnie w układzie współrzędnych odwróconych, w stosunku do układu opisującego element w kontekście kąta momentu głównego. Całkowanie macierzy sztywności odbywa się po transformacji macierzy sprężystości:

$$[D]_{,xy} = [T][D][T]^T \quad (15)$$

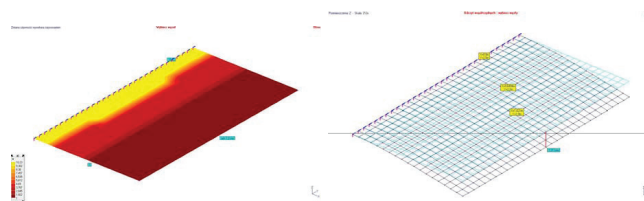
gdzie:  $[T]$  – macierz transformacji określana następująco:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (16)$$

gdzie:  $\beta$  – kąt nachylenia momentu głównego do osi  $X$ .



Rys. 3. Wartości momentów zginających oraz – po prawej – potrzebne obliczeniowe pola przekrojów wkładek zbrojeniowych (rys. archiwum autora)



Rys. 4. Zmiana sztywności wywołana zarysowaniem w strefie rozciąganej płyty oraz – po prawej – przemieszczenia konstrukcji wynikające z modelu ugięcia płyty wspornikowej balkonu [9] (rys. archiwum autora)

## Podsumowanie

Opracowanie powstało na bazie wieloletnich doświadczeń autora. Materiał może być przydatny pracownikom naukowo-dydaktycznym, konstruktorom, architektom, jak również młodzieży studenckiej.

## LITERATURA

1. „EUROKOD 2. Podręczny skrót dla projektantów konstrukcji żelbetonowych”. Red. prof. Andrzej Ajdukiewicz. Kraków: Stowarzyszenie Producentów Cementu, 2009.
2. Starosolski W. „Konstrukcje Żelbetowe według Eurokodu 2 i norm związanych”. Tom I. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.
3. Knauff M. „Obliczanie konstrukcji żelbetonowych według Eurokodu 2”. Warszawa: PWN, 2015.
4. Kączkowski Z. „Płyty. Obliczenia statyczne”. Warszawa: Arkady, 1968.
5. Zienkiewicz O.C. „Metoda Elementów Skończonych”. Warszawa: Arkady, 1972.
6. Rakowski G., Kacprzyk Z. „Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji”. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2005.
7. Grajek K. „ABC Płyta”. Gliwice: PRO-SOFT, 2004.
8. PN-EN 1992-1-1 Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków, PKN wrzesień 2008.
9. Bieranowski P. „Konstruowanie węzła pasmowego konstrukcji w płaszczyźnie tarczy stropu na przykładzie rozwiązania ustroju balkonu wspornikowego”. *Przegląd Budowlany* 5/2015. ■