Oprogramowanie do numerycznej analizy wzrostu pęknięcia zmęczeniowego za pomocą modelu semi-Markowa

Software for numerical analysis of fatigue crack growth with semi-Markovian model

JÓZEF DREWNIAK
LESZEK HOJDYS *

Materiały z XX SKWPWiE, Jurata 2016 r.
DOI: 10.17814/mechanik.2016.7.122

W artykule zostało zaprezentowane oryginalne oprogramowanie służące do numerycznej analizy procesów zmęczeniowych. W oprogramowaniu tym zostały zaimplementowane probabilistyczne metody wyznaczania trwałości zmęczeniowej oraz propagacji pękania zmęczeniowego, bazujące przede wszystkim na modelach Markowa i semi-Markowa. Niniejsza praca skupia się głównie na modelu semi-Markowa.
SŁOWA KLUCZOWE: łańcuchy Markowa, model semi-Markowa, model Bogdanowa-Kozina

In this paper was presented the original software for numerical analysis of fatigue processes. In the software has been implemented probabilistic methods for determining of the fatigue life and fatigue crack propagation, based primarily on Markov chains and semi-Markov processes. This paper mainly focus on semi-Markovian fatigue crack growth model.
KEYWORDS: Markov chains, semi-Markovian models, Bogdanov-Kozin model

Zmęczenie materiałów konstrukcyjnych jest najczęstszą przyczyną uszkodzeń elementów maszyn [1]. Cechą charakterystyczną procesu zmęczeniowego jest to, że jest to proces losowy i w początkowej fazie trudno zauważalny. Dlatego wywołane tym procesem krytyczne uszkodzenia elementów maszyn pojawiają się nagle i w większości przypadków niespodziewanie. Ważne jest więc przewidywanie trwałości zmęczeniowej zagrożonych elementów lub zespołów maszyn – najlepiej na podstawie modeli probabilistycznych. Zjawisko zmęczenia materiałów z powodu dużej złożoności jest bardzo trudne w modelowaniu. Istniejące obecnie modele matematyczne opisujące ten proces charakteryzują się dużą złożonością, przez co sprawiają trudności w implementacji przez inżynierów. Dodatkowo występuje duży rozrzut statystyczny wyników badań zmęczeniowych. Dlatego też wyznaczanie trwałości zmęczeniowej metodami deterministycznymi jest coraz częściej zastępowane metodami probabilistycznymi [1, 6].

W niniejszym artykule przedstawiono oryginalne oprogramowanie służące do numerycznej analizy procesów zmęczenia elementów maszyn. W oprogramowaniu tym zostały głównie zaimplementowane metody wyznaczania trwałości zmęczeniowej oparte na modelu Bogdanowa-Kozina, wykorzystującym łańcuchy Markowa. Metody te zostały szerzej opisane w publikacjach [6, 7]. Ten artykuł skupia się na nowo zaimplementowanej metodzie bazującej na modelu semi-Markowa [3]. W przeciwieństwie do czysto fenomenologicznych modeli Bogdanowa-Kozina, bazujących na modelach Markowa, metoda ta pozwala uwzględnić parametry fizyczne procesu zmęczeniowego poprzez wykorzystanie równania Parisa-Erdogana, a dodatkowo daje możliwość wyznaczenia parametrów modelu dla innych obciążeń niż te, dla których były wykonane źródłowe badania zmęczeniowe [3, 5, 8, 9].

* Dr hab. inż. Józef Drewniak, prof. ATH (jdrewniak@ath.bielsko.pl); mgr inż. Leszek Hojdys (lhojdys@op.pl) – Akademia Techniczno-Humanistyczna

Model semi-Markowa propagacji pęknięcia zmęczeniowego [4]

Długość pęknięcia zmęczeniowego a można zdefiniować jako sumę jednostkowych przyrostów długości pęknięcia Δa. Początkową długość pęknięcia można zapisać jako:

$$a_0 = k_0 \Delta a \tag{1}$$

gdzie k_0 jest liczbą całkowitą, przyjętą jako stała.

Wartość długości pęknięcia można więc zapisać wzorem:

$$a = (k_0 + j)\Delta a,\ j = 0, 1, 2, ..., n \tag{2}$$

Niech zmienna losowa $W_a = W_{k_0} + j$ określa czas potrzebny do osiągnięcia długości pęknięcia opisanej przez $k_0 + j$; wtedy równanie Parisa-Erdogana można zapisać w postaci:

$$\frac{\mathrm{d}E\{W_a\}}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{C(\Delta K)^m} = \frac{1}{C(K(a,\Delta\sigma))} = \frac{1}{C}\left(\frac{2a\Delta\sigma}{\pi}\right)^{-\frac{m}{2}} \tag{3}$$

gdzie stałe C oraz m są parametrami równania Parisa-Erdogana, $\Delta\sigma$ jest zmianą amplitudy naprężenia, ΔK – zakresem współczynnika intensywności naprężeń (uogólniając, ΔK można wyrazić jako funkcję $K(a, \Delta\sigma)$.

Opis procesu kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych za pomocą łańcuchów semi-Markowa wymaga dyskretyzacji wzoru (3) przy użyciu zależności (1):

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}E\{W_a\}}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{C}\left(\frac{2a\Delta\sigma}{\pi}\right)^{-\frac{m}{2}} = [\alpha(k_0 + j)^{-\frac{m}{2}}]^{-1} \\ \alpha = \frac{c}{\Delta a}\left(\frac{2a\Delta\sigma}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}}, \frac{a}{\Delta a} = k_0 + j\end{gathered} \tag{4}$$

Zmienną losową W_a można wyrazić jako sumę niezależnych zmiennych losowych T_j, określających czas oczekiwania w j-tym stanie związanym z określoną długością pęknięcia zmęczeniowego:

$$\begin{gathered}W_a = W_{k_0+j} = T_0 + T_1 + ... + T_{j-1} \\ W_{k_0+j+1} - W_{k_0+j} = \Delta W_{k_0+j} = T_j\end{gathered} \tag{5}$$

Zmienna losowa T_j ma rozkład ujemny dwumianowy (Pascala) o dwóch parametrach – β_j oraz q_j, ponieważ jest sumą niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie geometrycznym [3, 4, 8, 9]. Średnią i wariancję rozkładu Pascala można wyrazić następująco:

$$\frac{\Delta E\{W_{k_0+j}\}}{\Delta j} = E\{T_j\} = \frac{\beta_j}{q_j}, \operatorname{var} T_j + E\{T_j\} = \frac{\beta_j}{q_j^2} \tag{6}$$

Po uwzględnieniu zależności (6) z równania (4) można wyprowadzić:

$$q_j = \alpha_j (k_0 + j)^{\frac{m}{2}} \tag{7}$$

$$\frac{\beta_j}{\alpha_j} = \frac{1}{\alpha} = \left[\frac{c}{\Delta a} \left(\frac{2a\Delta\sigma}{\pi} \right)^{\frac{m}{2}} \right]^{-1} \tag{8}$$

Ze wzoru (8) można dodatkowo uzyskać zależność pozwalającą obliczyć nowe parametry modelu wyznaczonego dla wartości amplitudy naprężeń $\Delta\sigma_1$ przy zadanej nowej wartości amplitudy $\Delta\sigma_2$:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_1 \left(\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\sigma_2}\right) \tag{9}$$

Na podstawie zależności (5÷7) można wyprowadzić rekurencyjne wzory, umożliwiające wyznaczenie parametrów poszczególnych rozkładów zmiennych losowych na podstawie wyników badań zmęczeniowych, w których zostały wyznaczone wartości średniej oraz wariancji liczby cykli potrzebnej do osiągnięcia danej długości pęknięcia zmęczeniowego [3, 8, 9]:

$$\begin{cases} E\{W_{k_0+k}\} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_j}{\alpha_j (k_0+j)^{\frac{n}{2}}} \\ VarW_{k_0+k} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_j}{\alpha_j^2 (k_0+j)^{\frac{n}{2}}} - E\{W_{k_0+k}\} \end{cases} \tag{10}$$

Ze względu na to, że zmienne losowe T_j mają rozkład Pascala, z definicji będący sumą niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie geometrycznym, łańcuch semi-Markowa można przekształcić na równoważny łańcuch Markowa. Zredukuje to znacznie ilość obliczeń. Łańcuch Markowa definiowany jest dla czasu T_1 za pomocą macierzy prawdopodobieństw przejścia o wymiarach $(\beta_0+\beta_1+1)\cdot(\beta_0+\beta_1+1)$:

$$Q_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1-q_0 & q_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-q_0 & q_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-q_0 & q_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-q_1 & q_1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-q_1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \beta_0 \\ \beta_0+1 \\ \vdots \\ \beta_0+\beta_1 \\ \beta_0+\beta_1+1 \end{array} \tag{11}$$

W analogiczny sposób można tworzyć macierze prawdopodobieństw przejść Q_j dla kolejnych czasów T_j, aż do ostatniego czasu T_n [3].

Znając macierz prawdopodobieństwa przejść Q_j oraz wektor rozkładu prawdopodobieństwa początkowego p_0, można wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa p_x, stosując podstawową zależność w teorii łańcuchów Markowa:

$$p_0 = [1,0,\dots,0], \quad p_x = p_0 \cdot Q_j^x \tag{12}$$

Elementy wektora p_x odpowiadają prawdopodobieństwu znalezienia się łańcucha Markowa w stanie $j = 0, 1, \dots, n$ w czasie x.

Opis oprogramowania

W oparciu o model Bogdanowa-Kozina oraz inne probabilistyczne metody zostało stworzone oprogramowanie służące do numerycznej analizy procesów zmęczeniowych. Obecnie w oprogramowaniu tym są zaimplementowane następujące metody numerycznej analizy procesów zmęczeniowych:

1. Wykres Woehlera.
2. Wykres logarytmiczno-normalny.
3. Doświadczalna dystrybuanta trwałości zmęczeniowej.
4. Rozkład Weibulla.
5. Stacjonarny model Bogdanowa-Kozina kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych.
6. Niestacjonarny (dla obciążeń o zmiennej amplitudzie) model kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych Bogdanowa-Kozina.
7. Model Bogdanowa-Kozina wzrostu pęknięcia zmęczeniowego.
8. Model semi-Markowa wzrostu pęknięcia zmęczeniowego.

Każdy zaimplementowany model posiada okno dialogowe umożliwiające ustawienie jego parametrów. Dodatkowo program zawiera formularze służące do edycji oraz wprowadzania danych z serii pomiarowych. Wynikiem działania zaimplementowanych modeli są wykresy dystrybuant trwałości zmęczeniowej.

Podsumowanie

Celem zweryfikowania poprawności zaimplementowania w oprogramowaniu metody bazującej na modelu semi-Markowa wykorzystano dane z eksperymentów zmęczeniowych pochodzące z literatury. Uzyskane wyniki okazały się zgodne z wynikami przedstawionymi w literaturze. Planowane jest przeprowadzenie badań zmęczeniowych walcowych kół zębatych, których wyniki zostaną opracowane za pomocą przygotowanego oprogramowania. Dodatkowo współczynnik ΔK zostanie wyznaczony za pomocą metody elementów skończonych wzbogaconej algorytmami mechaniki pękania XFEM.

Planowana jest dalsza rozbudowa opracowanego oprogramowania o nowe modele zmęczeniowe. W następnych wersjach oprogramowania powinny zostać zaimplementowane modele odpowiednie dla obciążeń o zmiennej amplitudzie, w tym także losowej. Planowane jest dalsze rozwijanie modelu semi-Markowa w połączeniu z innymi niż Parisa-Erdogana modelami propagacji pękania.

LITERATURA

1. Kocańda S., Szala J. *„Podstawy obliczeń zmęczeniowych”.* PWN Warszawa, 1985.
2. Sobczyk K., Spencer JR. B.F. *„Stochastyczne modele zmęczenia materiałów”.* WNT Warszawa, 1992.
3. Bogdanoff J.L., Kozin F. *„Probabilistic models of Cumulative Damage”.* John Wiley & Sons New York, 1985.
4. Bogdanoff J.L., Kozin F. „Probabilistic models of fatigue crack growth II”. *Engineering Fracture Mechanics* 20, 1984.
5. Bogdanoff J.L., Kozin F. „Probabilistic models of fatigue crack growth: results and speculations”. *Nuclear Engineering and Design* 115, 1989.
6. Drewniak J.: *„Probabilistyczny model obliczeniowy trwałości zmęczeniowej elementów i zespołów maszyn”.* Wydawnictwo Filii PŁ Bielsko-Biała, 1992.
7. Drewniak J., Hojdys L. „Komputerowe wspomaganie analizy trwałości zmęczeniowej walcowych kół zębatych”. *Mechanik* nr 7, 2015.
8. Kozin F., Bogdanoff J. „On probabilistic modelling of fatigue crack growth”. *Engineering Fracture Mechanics* 18, 1983.
9. Howard R.A. *„Dynamic Probabilistic Systems. Vol. I. and II”.* John Wiley&Sons New York, 1971.