

Wybrane metody numeryczne i ich porównanie

Computer methods and their comparizons

Materiały z XX SKWPIE, Jurata 2016 r.
DOI: 10.17814/mechanik.2016.7.169

JAN B. OBRĘBSKI *

Praca bazuje na własnych doświadczeniach autora nabytych przy budowie programów komputerowych oraz ich uruchamianiu i eksploatacji, opartych na teorii i oryginalnych algorytmach opracowanych przez autora. Porównywano: efektywność poszczególnych metod komputerowych i własnych algorytmów, potrzebnych danych wejściowych i postać rezultatów. Testowane metody dotyczyły: analizy wytrzymałości oraz pojedynczych prętów prostych różnego typu, w tym kompozytowych, skomplikowanych przestrzennych konstrukcji prętowych – analizy, syntezy, optymalizacji, statyki, dynamiki, stateczności, w tym pod obciążeniem złożonym, stateczności dynamicznej, zastosowania czasoprzestrzeni (3D-T) i obciążeń ruchomych itp. Praca podaje wnioski płynące z tych badań.

SŁOWA KLUCZOWE: analiza, konstrukcje prętowe, powierzchniowe krytyczne

The paper is based on own experiences obtained by constructing, testing and exploiting computer programs based rather on own theory and on original algorithms and after exploitation of some commercial programs. There, were compared: efficiency of selected computer methods, applied own algorithms, necessary input data and form of obtained results. This way tested computer methods concern: mechanical analyses of single straight bars of different types including composite ones, strength of such bars, complicated space bar structures, analysis, synthesis, optimization, static, dynamics, stability – including combined loadings, dynamical stability, application of 3D-Time space for e.g. moving loads etc. The paper presents conclusions resulting off these investigations.

KEYWORDS: analysis, bar structures, critical loadings and surfaces

Wspomniane w streszczeniu teorie autor implementował w komputerach o różnej wielkości i mocy obliczeniowej. W ten sposób powstały nie tylko opisy teoretyczne, w tym równania równowagi bądź równania ruchu różnych obiektów, ale i oryginalne algorytmy dla własnoręcznie napisanych programów komputerowych. Część zagadnień autor, jego studenci i doktoranci analizowali z wykorzystaniem programów komercyjnych, co pozwoliło porównać skuteczność poszczególnych metod obliczeniowych oraz i jakość otrzymywanych wyników.

Podczas testów nowych, własnych programów wykonywano różne zadania. W ten sposób powstawał materiał porównawczy. Autor obliczał też przykłady porównawcze testujące same teorie, ich podstawy i założenia. Dotyczyło to wytrzymałości prętów prostych o różnych przekrojach, w tym cienkościennych, pełnych, jednorodnych i kompozytowych. Wiele uwagi poświęcono też postulowanemu przez autora jednolitemu kryterium utraty stateczności konstrukcji i pojedynczych prętów prostych poddanych różnorodnym obciążeniom, w tym dowolnym.

Opracowane nowe teorie

Autor pracował nad teoriami dotyczącymi głównie konstrukcji prętowych – zarówno pojedynczych prętów, jak i wielkich sprężystych układów „siatkowych” o skomplikowanej geometrii.

• **Teoria prętów cienkościennych (TPC).** Publikowana już wcześniej, lecz w całości wydrukowana została w skryptach. Zawiera statykę, dynamikę i teorię drugiego rzędu, w tym stateczność pojedynczego pręta. Przekroje pręta pryzmatycznego są dowolne, złożone z kilku materiałów, otwarte i zamknięte. Podano też wprowadzenie do analizy globalnej układów prętowych oraz oryginalne macierze dla metody elementów skończonych (MES), obejmujące statykę, dynamikę, różne warunki brzegowe pręta. Uwzględniono tam skręcanie pręta, w tym przy obliczaniu naprężeń:

$$\tau_{1s} = \tau_o - \frac{1}{\delta} \left(\frac{T_2 \tilde{S}_3}{I_3} + \frac{T_3 \tilde{S}_2}{I_2} + \frac{M_{\omega} \tilde{S}_{\omega}}{I_{\omega}} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{E} \left(\frac{T_1}{A} - \frac{M_3 \eta_2}{I_3} + \frac{M_2 \eta_3}{I_2} + \frac{B \hat{\omega}}{I_{\omega}} \right)$$

• **Wytrzymałość prętów prostych o dowolnych przekrojach.** W kolejnych latach w księgach LSCE podano uzasadnienie, że TPC można zastosować w pełnym zakresie do analizy prętów prostych o dowolnych przekrojach, w tym pełnych i kompozytowych – zbudowanych z kilku materiałów. Podano też propozycje uwzględnienia wpływu utraty stateczności pręta przy wytrzymałości złożonej (dowolne obciążenia i warunki brzegowe):

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{E} \left(m_{w1} \frac{T_1}{A} - m_{w3} \frac{M_3 \eta_2}{I_3} + m_{w2} \frac{M_2 \eta_3}{I_2} + m_{w4} \frac{B \omega}{I_{\omega}} \right)$$

lub

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{E} m_w \left(\frac{T_1}{A} - \frac{M_3 \eta_2}{I_3} + \frac{M_2 \eta_3}{I_2} + \frac{B \omega}{I_{\omega}} \right) \quad (2)$$

• **Teoria do analizy wielkich przestrzennych układów prętowych.** Tu w zależności od wymogów zakładanych co do dokładności obliczeń, konstrukcję można modelować, jako kratownicę (3)₁, lub ramę (3)_{1,2} albo dokładniej określić skręcanie – pełne dziewięć równań (3) [3].

$$\sum_{\Lambda=1}^N \sum_{i=1}^3 t_{\Lambda r} T_{i\Lambda} + F_r = 0, \quad \sum_{\Lambda=1}^N \sum_{i=1}^3 t_{\Lambda r} M_{i\Lambda} + M_r = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{\Lambda=1}^N \sum_{i=1}^3 t_{\Lambda r} B_{i\Lambda} + B_r = 0$$

Powyższe równania, z uwagi na uwzględnienie w związkach fizycznych pręta prostego współczynników opisujących różne zakresy analizy (statykę, dynamikę itd.) i dowolne warunki brzegowe dla każdej z trzech funkcji opisujących przemieszczenia, są bardzo ogólne.

• **Jednolite kryterium utraty stateczności i geometrycznej zmienności konstrukcji.** Autor doszedł do wniosku, że łącznie dla zagadnień utraty stateczności oraz dla oceny geometrycznej niezmienności dowolnych konstrukcji, w tym pojedynczych prętów, płyt, powłok i układów konstrukcyjnych zbudowanych z wielu takich i innych elementów, można stosować to samo jednolite kryterium o postaci:

* Prof. dr hab. inż. Jan B. Obrębski, emerytowany profesor zwyczajny Politechniki Warszawskiej

$$f(P, \omega, v, a, M, m, d, t) = \det[W(P, \omega, v, a, M, m, d, t)] = 0 \quad (4)$$

gdzie W to główny wyznacznik układu równań opisujących stan równowagi konstrukcji, będący funkcją: uogólnionego systemu obciążeń zewnętrznych P , częstości drgań własnych, prędkości i przyspieszenia obciążenia, masy obiektu M , poruszającej się po obiekcie masy m , tłumienia i czasu.

Wyznacznik mogą tworzyć równania różniczkowe (Euler), różnicowe, macierze sztywności ułożone metodą różnic skończonych (MRS) lub MES, zarówno dla statyki, jak i dynamiki, w tym dla teorii pierwszego i drugiego rzędu, ewentualnie inne. Zerowanie się wartości takiego wyznacznika oznacza geometryczną zmienność układu konstrukcyjnego lub utratę stateczności. Tak skonstruowane kryterium może zależeć od wielu następujących parametrów: kształtu przekroju, jego symetrii lub bisymetrii, warunków brzegowych, stosowanych materiałów, obciążeń złożonych i zapewne wielu innych. Wprowadzono tu pojęcia *izo-powierzchni krytycznych* oraz *krytycznych powierzchni granicznych*. Rozszerzono w ten sposób znane rozwiązania Własowa [2, 4] korygując jednocześnie pewne błędy merytoryczne.

• **Nowe numeryczne ujęcie metody czasoprzestrzeni (3D-T).** Problemy numeryczne z jakością wyników programu komercyjnego w zakresie dynamiki modelu budynku wysokiego skierowały uwagę autora na czasoprzestrzeń, gdzie trójwymiarową przestrzeń uzupełniono czwartym wymiarem – czasem. Rozwiązanie uzyskano numerycznie z zastosowaniem MRS. Testowe rozwiązania przeprowadzono dla modelu prętowego i dla płyt z ruchomymi obciążeniami.

Rozwiązania analityczne

Wymieniono tu jedynie wybrane przykłady.

- Rozwiązanie dla trzech równań równowagi powtarzalnego węzła uzyskane analitycznie dla rusztu sześciokątnego o rzucie kołowym i dla pasma rusztowego z sześciokątną siatką prętów.
- Rozwiązania analityczne dla TPC wspomagane komputerem w różny sposób.
- Bardzo ważne zadanie, wykonane na zamówienie, dotyczyło sprawdzenia możliwości utraty stateczności słupów podtrzymujących ekrany akustyczne dla obwodnicy autostradowej Wrocławia. Zaawansowana teoria została sprowadzona do prostych obliczeń analitycznych, wykonanych wręcz za pomocą kalkulatora, i sprawdzona doświadczalnie [1]. Wykazano tu praktycznie zbieżność teorii z eksperymentem.

Rozwiązania hybrydowe

Wyniki uzyskuje się za pomocą komputera, stosując przetworzone analitycznie równania równowagi węzła konstrukcji.

• **Ruszt sześciokątny i pasmo płytowe.** W tym przypadku układ trzech różnicowych równań równowagi węzła powtarzalnego sprowadzono analitycznie do jednego równania równowagi zawierającego tylko ugięcia rusztu. Dalej rozwiązywano numerycznie zwykły układ równań algebraicznych liniowych. W ten sposób uzyskuje się większe możliwości uwzględniania dowolnego obciążenia i warunków brzegowych.

• **Analiza prętów prostych, w dowolnym zakresie, za pomocą MRS.** Tu rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych typu (2)₁. W ten sposób omija się ograniczenia wynikające z istnienia w rozwiązaniach analitycznych funkcji hiperbolicznych, a pręty mogą mieć w każdym z węzłów różną sztywność i obciążenia zewnętrzne oraz warunki brzegowe.

Nowe ujęcia metod komputerowych

• **Metoda równań różnicowo-macierzowych (MRRM).** W tym podejściu niezależnie od rodzaju analizy zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych (5)₁, gdzie równanie równowagi węzła ma postać (5)₂. Podejście to implementowano do bardzo zaawansowanego numerycznie systemu obliczeniowego o nazwie WDKM [3].

$$Kx = 0, \quad \sum_{\Lambda=1}^N (W_{\Lambda}^o + W_{\Lambda} E_{\Lambda}) x = q \quad (5)$$

• **Metoda różnic skończonych.** To podejście numeryczne można zastosować do dowolnego zagadnienia opisanego równaniami różniczkowymi, zastępując je operatorami różnicowymi typu (6). Dzięki programowi MRS (objętość 17,5 KB!), zadanie takie można zadeklarować z klawiatury w systemie interakcyjnym:

$$C_r \left(A_b + \sum_{\Lambda=1}^n A_{r\Lambda} E_{\Lambda} \right) \Phi_r = Q_r \quad (6)$$

• **Metoda czasoprzestrzeni (3D-T) z wykorzystaniem MRS.** To podejście umożliwia uzyskanie odpowiedzi konstrukcji na praktycznie dowolne obciążenia ruchome oraz pokazanie odkształcenia układu jednocześnie w każdej z rozpatrywanych chwil czasowych. Wadą metody jest konieczność zaangażowania komputera o dużej mocy.

• **Metoda elementów skończonych.** Metodę tę wykorzystano do celów dydaktycznych, do belek, kratownic i ram (program MES).

• **Synteza konstrukcji prętowych.** Taką funkcję przewidziano w trzech programach autora, o różnym stopniu dokładności obliczeń. Program KMD wymiarował konstrukcje prętowe wpisane w prostokątną siatkę punktów, wykorzystując metodę tzw. naprężeń dopuszczalnych. Natomiast program KMG wymiarował podobne konstrukcje jak poprzedni i zapewniał spełnienie wymagań metody stanów granicznych. Z kolei program WDKM był przeznaczony do analizy szerokiej klasy konstrukcji prętowych wpisanych w dwukrzywiznowe siatki punktów. We wszystkich przypadkach potrzebne przekroje były dobierane z katalogu zadeklarowanego programowi.

• **Póloptymalizacja konstrukcji przestrzennych.** Tu zespół programów sporządzonych na potrzeby rozprawy doktorskiej obywatela Libii, A.H. Fahemy, przy danym schemacie i warunkach brzegowych konstrukcji oraz obciążeniu porównywał wyniki (np. przemieszczenia, naprężenia, masę konstrukcji) i sporządzał odpowiednie wykresy dla zmieniających się pojedynczych parametrów, aby umożliwić człowiekowi podjęcie najlepszej decyzji.

• **Optymalizacja.** W swojej rozprawie doktorskiej Libijczyk M.H. Rhuma wykorzystał program TRUSSOL wykonujący takie zadanie, opracowany przez K. Dontena z Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Porównywano tam m.in. masę konstrukcji, naprężenia i przemieszczenia oraz dobierano niezbędne przekroje prętów otrzymywane dla konkretnego typu kopuł Schwedlera lub Lamella, przy zmieniającej się wyniosłości. Kopuły traktowano jako przestrzenne kratownice o węzłach przegubowych. Użyty tu program K. Dontena, adaptowany przez Rhumę dla kopuł Schwedlera i Lamella, miał funkcje niemal takie same jak programy autora KMD i KMG.

Wykonane obliczenia porównawcze

• **Dokładność uzyskania wyników.** Tu testy dotyczyły symetrycznych przestrzennych konstrukcji prętowych przy

stosowaniu pomysłu obliczania ich jako połowy lub ćwiartki. W ramach prac własnych autora i kilku prac magisterskich badano wpływ schematu konstrukcji dwuwarstwowych i stosowanych różnych sposobów podparcia na rozkład i wartości sił powstających w prętach. Porównania takie prowadzą do wniosku, że wyniki obliczeń dla fragmentów konstrukcji, uzyskane dzięki symetrii lub bisymetrii analizowanej konstrukcji, są gorsze ilościowo.

- **Obliczenia porównawcze w zakresie wytrzymałości.** Porównania takie dotyczące wyznaczania naprężeń przeprowadzono dla prętów prostych o dowolnych, podobnych przekrojach: cienkościennych jednorodnych i kompozytowych symetrycznych.

- **Porównania dotyczące utraty stateczności prętów prostych.** Tu porównywano zachowanie się prętów o dowolnych (różnorodnych), lecz podobnych przekrojach (jak wyżej), badając kształt krytycznych powierzchni granicznych (dla obciążeń złożonych – zginanie i siła podłużna ściskająca) oraz zostawy izopowierzchnie krytyczne przy obciążeniu mimośrodowo działającej siły podłużnej ściskającej lub rozciągającej.

- **Wpływ warunków brzegowych na utratę stateczności prętów prostych.** Te prace były prowadzone z J. Tolksdorfem potwierdziły ogromny wpływ na rozwiązanie typu przekroju i szczególnie warunków brzegowych.

Własne algorytmy i programy komputerowe

- **Programy do analizy przestrzennych konstrukcji prętowych.** Są to programy dla konstrukcji wpisanych w prostokątne i dwukrzywiznowe siatki punktów, wykonujące w różnym zakresie przede wszystkim analizę, ale również ich syntezę.

- **Obliczanie charakterystyk geometrycznych przekrojów poprzecznych prętów.** Dla ułatwienia takich obliczeń opracowano małe programy, zarówno dla przekrojów jednorodnych, jak i kompozytowych (zbudowanych z kilku materiałów), w tym pełnych, oraz pewnej klasy cienkościennych.

- **Programy do opracowania własnych badań eksperymentalnych.** Tu także dla ułatwienia porównań wyników pomiarów doświadczalnych z metodami analitycznymi wykonano szereg programów. Pierwotnie programy te pisano w języku Turbo Pascal, a potem wykorzystywano MS Excel.

- **Opracowana własna grafika komputerowa.** Wraz z rozwojem teorii i oprogramowania dla dwukrzywiznowych dwuwarstwowych „pofalowanych” prętowych struktur przestrzennych nastąpił rozwój własnego oprogramowania o nazwie SIATKI. Niektóre, nawet zaawansowane wykresy dla przekroju pręta były rysowane za pomocą MS Excel (!).

Wykorzystane programy komercyjne

Do graficznej interpretacji wyników własnych, były używane znane powszechnie programy komercyjne.

- **AutoCAD.** Wykorzystywano go do wykonywania rysunków schematów doświadczenia i wielu skomplikowanych wykresów takich jak: przestrzenne wykresy naprężeń, wspomniane izopowierzchnie krytyczne i krytyczne powierzchnie graniczne, a więc tam, gdzie własna grafika nie obejmowała takich zadań.

- **MS Excel.** Program ten znacznie później zaczęto stosować do wykonywania wspomnianych obliczeń wytrzymałościowych, w tym do zagadnień utraty stateczności prętów prostych, kończonych często wykresami obliczonych wielkości.

- **Robot.** Ten program wykorzystano do obliczania stanu naprężenia i przemieszczeń we wspornikowych prętach cienkościennych badanych doświadczalnie. Program Robot V6 wykorzystywała w tym zakresie N. Jankowska, a Robot Millennium stosował J.B. Obrębski. Uzyskane w ten sposób wyniki

były zbyt wygładzone – nie wskazywały dobrze np. miejsc koncentracji naprężeń.

- **Analiza dynamiczna budynków wysokich za pomocą metody 3D-T.** Ciekawą pracę doktorską w tym zakresie wykonał R. Szmit (promotor J.B. Obrębski) z wykorzystaniem MRS. Tu do właściwych obliczeń zastosowano MathCAD 2000 Professional z własnymi aplikacjami, a do sporządzenia wykresów ilustrujących drgania budynku – program Corel Draw.

- **Utrata stateczności kompozytowych prętów prostych.** Do obliczeń w zakresie wytrzymałości i utraty stateczności kompozytowych prętów prostych studenci specjalizacji teoria konstrukcji na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej wykorzystali możliwości programów: MathCAD 14.03, 15.0, Wolfram Mathematica v.9.1, 10. Tu znowu, grafika wykonana w ten sposób (Mathematica funkcja Plot) znacznie odbiegała jakością i sensem od sporządzonej przez autora, z wykorzystaniem specjalnie wyprowadzonych wzorów dla krzywych opisujących warstwicę i następnie powierzchnie wyrysowane AutoCAD-em.

- **Grafika komputerowa.** Programy GRAPHIC i SURFER były wykorzystywane w rozprawie doktorskiej M.H. Rhumy.

- **Program TRUSSOL.** Ten program autorstwa K. Dontena z Politechniki Warszawskiej był wykorzystany przez M.H. Rhumę do obliczeń kratownic przestrzennych w zakresie statyki. Założenia do tego programu były bardzo podobne, a wręcz identyczne z opracowanymi przez autora programów KMD i KMG (!).

Dydaktyka

W zakresie zajęć laboratoryjnych do nauki zasad funkcjonowania dwóch metod komputerowych na Wydziale Budownictwa ART (później na Mechanicznym UWM) w Olsztynie, autor stosował napisane własnoręcznie programy: MES i MRS.

Prace Wacława Przybyły – supermacierze

Warto tu wymienić serię kilku prac prezentowanych przez Wacława Przybyłę z jego doktorantami, dotyczących zastosowania super- i hipermacierzy do obliczania wielkich układów konstrukcyjnych. W tych bardzo wartościowych pracach pokazano własne algorytmy numeryczne, pozwalające na rozwiązywanie zadań z bardzo wieloma niewiadomymi.

Podsumowanie i wnioski

W niniejszej pracy autor zwrócił uwagę na nowe metody numeryczne zaproponowane przez siebie oraz innych, z także na nietypowe zastosowania znanych metod, komentując ich skuteczność i dokładność. Ustalono, że wyniki otrzymywane za pomocą znanych systemów komputerowych są niestety często gorsze od obliczonych problemowo-zorientowanymi programami własnymi.

LITERATURA

1. Bober W., Tarczewski R. *Shaping of T-section steel post for acoustic screen*. XVI LSCE [14] Warsaw, Dec.3, 2010. Ed. by Micro-Publisher J.B.O., Wyd.Nauk., pp. 97÷99.
2. Mutermilch J., Kociołek A. „Wytrzymałość i stateczność prętów cienkościennych o przekroju otwartym”. Warszawa, WPW, 1972.
3. Gutkowski W., Obrębski J.B., Bauer J., Gierliński J., Rączka J., Żmijewski K. „Obliczenia Statyczne Przekryć Strukturalnych”. ARKADY, Warszawa 1980 oraz tłumacz. *Statische Berechnung der Raumstaberke*. Werner Verlag/Arkady, Warsaw, (1985).
4. Własow W.Z. „Tonkostiennyye uprugije stierżni”. Moskwa, Gosstrojizd. 1940 i wyd. drugie Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1959. ■