

Roman KRÓL¹

OPTYMALIZACJA KSZTAŁTU ZĘBÓW PIŁ TAŚMOWYCH

Odpowiedni dobór narzędzi tnących jest jednym z czynników decydujących o wydajności produkcji. Nieodpowiednio ukształtowany wręb piły taśmowej będzie skutkował powstawaniem koncentracji naprężeń oraz może spowodować jej pękanie. Celem optymalizacji kształtu zębów pił taśmowych przedstawionej w tym artykule było wyznaczenie optymalnego kształtu zęba odznaczającego się bardziej równomiernym rozkładem naprężeń oraz mniejszymi maksymalnymi wartościami naprężeń zredukowanych. Do optymalizacji użyta została metoda Hadamarda z zastosowaniem metody elementów skończonych. Obliczenia przeprowadzone zostały dla płaskiego stanu naprężeń. Otrzymane rezultaty spełniają kryteria wytrzymałościowe i mogą służyć jako wytyczne do projektowania optymalnych kształtów zębów, ale mogą nie spełniać wymagań technologicznych związanych z procesem cięcia (np. odprowadzanie wiórów).

THE SHAPE OPTIMIZATION OF BANDSAW TEETH

The proper selection of the cutting tools is one of the determining factors of the productivity. Improperly shaped bandsaw gullet can lead to the stress concentration and cracking of the cutting tool. The main aim of the structural shape optimization of the bandsaw teeth presented in this article is to obtain optimal shape of the tooth which is characterized by the more equal distribution of stresses and smaller value of the maximum von Mises stress. The Hadamard method is used for analysis which is based on the Finite Element Method. Calculations were performed for the plane stress state. The obtained results meet the strength criteria, but it can not meet the technical criteria like chip removal etc. They can be taken into account as a guidelines for the tooth shape design.

1. WSTĘP

W artykule przedstawione zostały rezultaty optymalizacji kształtu (*ang. structural shape optimization*) zębów pił taśmowych do metalu. Optymalizowane były dwa modele zębów do cięcia metalu oraz jeden model rozciąganej taśmy z zębami. Celem optymalizacji była minimalizacja pracy wewnętrznej (9) wykonanej przez sprężystą konstrukcję pod działaniem zewnętrznych sił skrawania lub sił napinających taśmę. Rezultaty uzyskane zostały przy pomocy programów FreeFem++ [1] oraz ParaView [2] przy wykorzystaniu metod przedstawionych głównie w [3] oraz omówionych w [4, 5, 6, 7, 8]. Podstawą tych metod jest Metoda Elementów Skończonych (MES). Optymalne konstrukcje zęba i piły odznaczają się większą sztywnością oraz mniejszymi maksymalnymi naprężeniami zredukowanymi. Wyznaczone zostały optymalne kształty zębów dla obciążenia jedną siłą skrawania (pochyloną pod kątem 15° do poziomu) oraz optymalny pod względem maksymalnych naprężeń zredukowanych kształt wrębu dla rozciąganego fragmentu piły.

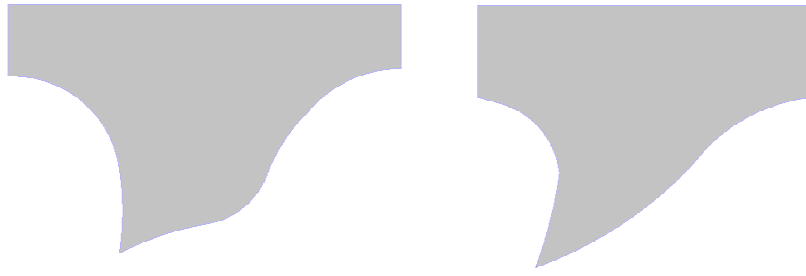
2. MODELE OPTYMALIZOWANYCH PIŁ

Sporządzone zostały odrębne modele przeznaczone do optymalizacji kształtu zęba oraz do optymalizacji kształtu piły. Kształty tych modeli przed optymalizacją przedstawione zostały na rysunkach 1 i 2.

3. WARUNKI BRZEGOWE

Na rysunkach 3 i 4 zostały przedstawione warunki brzegowe zastosowane w modelach zębów i modelu piły odpowiednio. Zaprezentowany sposób obciążenia został uwzględniony w optymalizacji dla stanu obciążenia siłą o stałym kierunku. Należy zwrócić uwagę na to, że otrzymane rezultaty (rys. 8, 10, 11, 13, 14 i 16) przedstawiają konstrukcję optymalną dla danej konfiguracji obciążeń zewnętrznych. W przypadku zmiany kierunku sił, otrzymany kształt zęba może okazać się dla danego obciążenia nieoptymalny. Dla uzyskania rezultatów optymalnych w zakresie zmieniającego się kierunku obciążenia (sytuacja taka występuje podczas cięcia piłami taśmowymi) należałoby przeprowadzić optymalizację dla wielokrotnego stanu obciążenia, której rezultatem byłby kształt zęba jednocześnie optymalny dla wielu kierunków obciążenia.

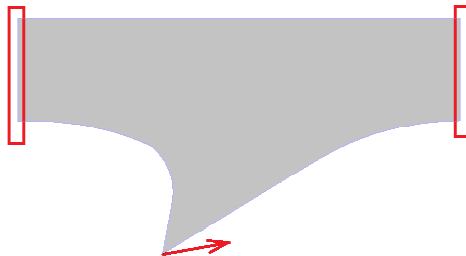
¹ Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, ul. Krasickiego 54, 26-600 Radom, tel. 603 253 392, e-mail: roman_krol@o2.pl



Rys. 1. Kształty zębów pił przed optymalizacją. Piła do metalu I typu (po lewej) i piła do metalu II typu (po prawej)



Rys. 2. Kształt piły przed optymalizacją. Piła do metalu I typu z uzębieniem zmiennym



Rys. 3. Warunki brzegowe w modelach zęba piły I i II typu. Czerwone prostokąty oznaczają węzły, w których przyłożone są warunki brzegowe Dirichleta (zablokowane liniowe przemieszczenia). Czerwona strzałka oznacza obciążenie siłą



Rys. 4. Warunki brzegowe w modelu piły. Czerwony prostokąt oznacza warunki brzegowe Dirichleta (zablokowane liniowe przemieszczenia). Czerwonymi strzałkami oznaczone zostały siły przyłożone w postaci liniowego obciążenia ciągłego

Wszystkie siły w optymalizowanych modelach przyłożone zostały jako liniowe obciążenie ciągłe. W przypadku zębów siły przyłożone zostały na odcinku 100 [μm], a w przypadku piły taśmowej dodatkowo na całej jej szerokości równej 23 [mm], powodując rozciąganie. Wartości sił przedstawione zostały w tabeli 1. Przyjęto, że oś x jest skierowana w prawo, a oś y do góry (rys. 3 i 4).

Tab. 1. Składowe sił skrawania w optymalizacji dla jednokrotnego stanu obciążenia

	Modele zębów oraz model piły	
	Składowa X [N/mm]	Składowa Y [N/mm]
Obciążenie zęba	627	168
Rozciąganie taśmy (rys. 4.)	230	0

4. ANALIZA NAPRĘŻEŃ

Zarówno modele pojedynczych zębów, jak i model piły rozpatrywane były dla płaskiego stanu naprężeń. Naprężenia wyznaczane były na podstawie parametrów materiałowych wyrażonych wzorami (6) i (7) oraz pola przemieszczeń wyznaczonego z równania (1).

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$$\delta_{ij} \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \quad (3)$$

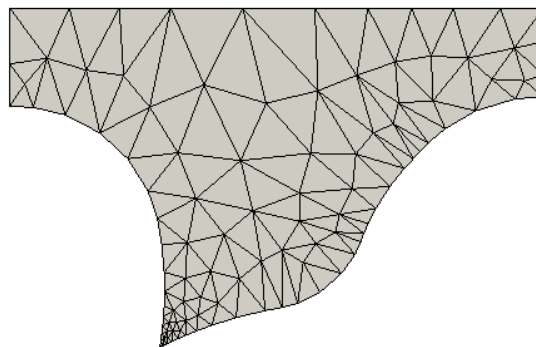
$$\varepsilon_{ij} = 0,5 \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \quad (6)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

gdzie: ∇ - operator gradientu, σ_{ij} - tensor naprężeń, ε_{ij} - tensor odkształceń, f - wektor sił zewnętrznych, u - wektor przemieszczeń, x_i, x_j - zmienne w płaskim układzie kartezjańskim (x i y odpowiednio), $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ - odkształcenia normalne w kierunku osi x i y odpowiednio, σ_{xx}, σ_{yy} - naprężenia normalne w kierunku osi x i y odpowiednio, σ_{xy} - naprężenia styczne, λ - współczynnik Lamego, ν - liczba Poissona, μ - moduł Kirchhoffa, E - moduł Younga.



Rys. 5. Siatka elementów skończonych w modelu MES zęba do metalu I typu

W przedstawionym powyżej równaniu sprężystości liniowej (1) zakłada się, że odkształcenia w materiale piły są małe. Równanie to rozwiązywane jest w siatce elementów skończonych (rys. 5). Zastosowany został w nim tensor naprężeń (5), którego związek z tensorem odkształceń wyraża wzór (2). Związek tensora odkształceń z przemieszczeniami wyrażony został wzorem (4). Na podstawie wyznaczonego pola przemieszczeń wyznaczone zostały naprężenia zredukowane (8).

$$\sigma_{ZRED} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\sigma_{xy}^2} \quad (8)$$

Opisane równania rozwiązywane są w każdej iteracji algorytmu optymalizacyjnego [1], aby na podstawie obliczonego pola przemieszczeń ustalić gradient kształtu.

5. PARAMETRY MATERIAŁOWE

W modelach z optymalizowanym zębem przyjęto parametry materiałowe jak dla stali M42. Dla modelu piły przyjęto parametry materiałowe jak dla stali D6A. Optymalizacja przeprowadzona została przy założeniu, że materiał ma właściwości liniowe. Parametry materiałowe przedstawione zostały w tabeli 2.

Tab. 2. Parametry materiałowe modeli zębów i modelu piły

	Modele zęba	Model piły
Moduł Younga E [MPa]	225000	205000
Moduł Kirchhoffa μ [MPa]	87200	79500
Liczba Poissona ν	0,29	0,29

6. ALGORYTM OPTYMALIZACJI

Do optymalizacji wykorzystano metodę Hadamarda [1, 7, 8] opartą o pochodne kształtu. Funkcja celu (9) użyta do optymalizacji minimalizuje pracę sprężystej konstrukcji zęba pod działaniem sił skrawania. Funkcja celu dla wszystkich modeli ograniczana była zależnością (10).

$$\min_{\Omega} c(\Omega) = \int_{\Gamma_N} f \cdot u_{\Omega} ds \quad (9)$$

$$V = \text{const} \quad (10)$$

gdzie: $c(\Omega)$ – praca wewnętrzna konstrukcji zęba lub piły, Γ_N – kontur modelu zęba lub piły, do którego przyłożone jest liniowe obciążenie ciągłe f , f – siła skrawania przyłożona jako liniowe obciążenie ciągłe (lub w przypadku modelu piły także siły rozciągające), u_{Ω} – pole przemieszczeń w zbiorze Ω węzłów siatki, V – objętość w danej iteracji (w płaskim modelu objętości obliczane są jako pole powierzchni).

W zastosowanym algorytmie, bazującym na metodach [3, 7, 8], aby wyznaczyć kolejną iterację niezbędny jest związek (11) [3, pkt. 2.3] pochodnej kształtu z kierunkiem największego spadku funkcji celu. Pochodna kształtu $\langle J'(\Omega), \theta \rangle$ w przypadku równań sprężystości (1) wyrażana jest zależnością (12).

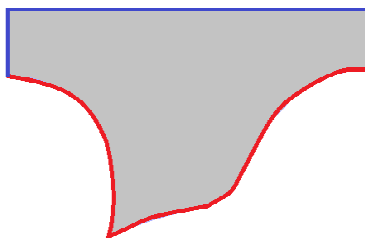
$$\int_{\Omega} (\nabla d \cdot \nabla \theta + d \cdot \theta) dx = \langle J'(\Omega), \theta \rangle \quad (11)$$

$$\langle J'(\Omega), \theta \rangle = \int_{\Gamma_M} (\vec{N} \cdot \theta) \cdot \left\{ 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + 0.5 \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 - l \right\} \quad (12)$$

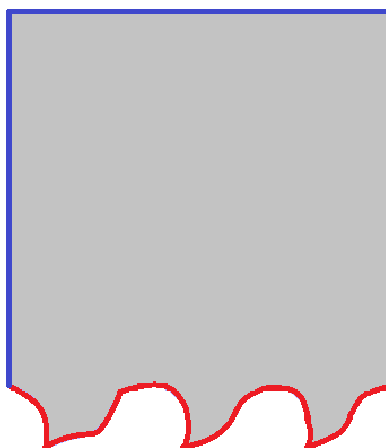
gdzie: Γ_M – fragment obwodu modelu podlegający zmianom, u_x , u_y – składowe wektora przemieszczeń względem osi x i y odpowiednio, μ – moduł Kirchhoffa, λ – współczynnik Lamego, N – wektor normalny do modyfikowanego konturu, θ – funkcja testowa używana przy sformułowaniu wariacyjnym równania różniczkowego, l – mnożnik Lagrange'a używany do wprowadzania ograniczeń na objętość, Ω – zbiór węzłów siatki elementów skończonych.

W celu rozwiązania równania (11) należy dodać warunki brzegowe Dirichleta określające brak przesunięć konturów niepodlegających zmianom. Wprowadza się je poprzez definicję $u_x = 0$ i $u_y = 0$ w konturach, na których konstrukcja jest utwierdzona.

Na podstawie [3, pkt. 2.4.1], aby uniknąć oscylacji konturów prowadzących do rozwiązań nie mających technologicznego zastosowania, w każdej iteracji przesuwana jest siatka o możliwie małej liczbie elementów skończonych. Obliczenia naprężeń oraz pola gradientu kształtu są natomiast wykonywane w siatce zagęszczonej o odpowiednio dużej liczbie elementów skończonych. Zagęszczanie siatki wykonywane jest przy pomocy funkcji *adaptmesh*, będącej jedną z funkcji programu FreeFem++. Kontury podlegające modyfikacji w procesie optymalizacji przedstawione zostały na rysunku 6 dla modelu zęba i na rysunku 7 dla modelu piły.



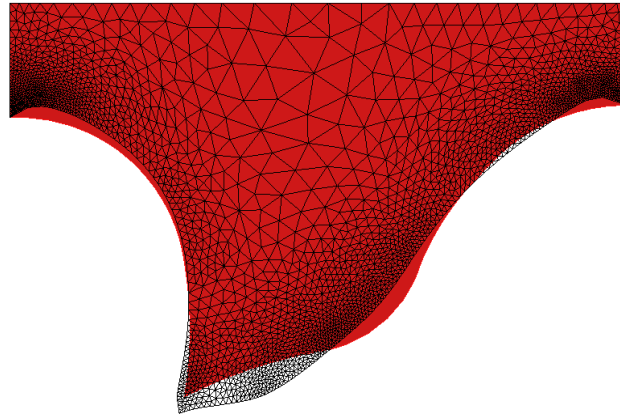
Rys. 6. Model zęba. Czerwone linie oznaczają modyfikowany kontur. Niebieskie linie oznaczają miejsca, w których określone są warunki brzegowe Dirichleta dla równania (1) Niebieskie kontury nie podlegają modyfikacji



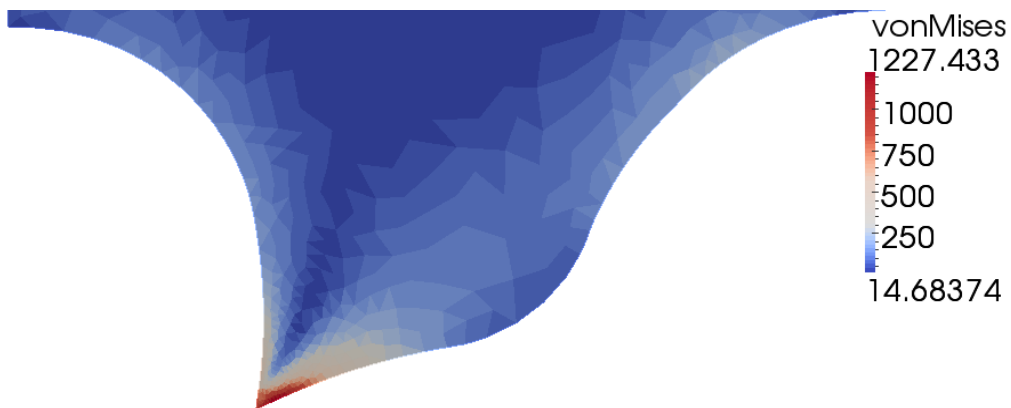
Rys. 7. Model piły. Czerwone linie oznaczają modyfikowany kontur. Niebieskie linie oznaczają miejsca, w których określone są warunki brzegowe Dirichleta dla równania (1). Niebieskie kontury nie podlegają modyfikacji

7. REZULTATY OPTYMALIZACJI

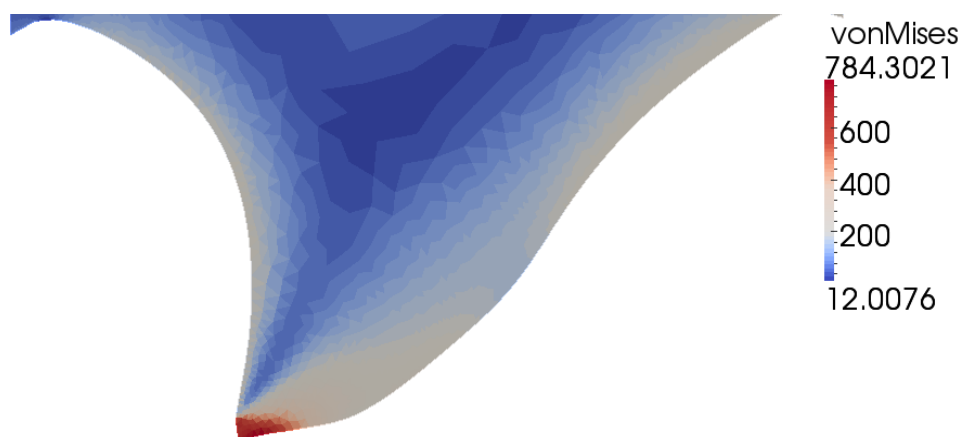
Optymalizacja została przeprowadzona dla dwóch modeli zębów oraz dla jednego modelu piły. Zarówno w modelach zębów, jak i w modelu piły zęby obciążone były siłą skierowaną pod kątem 15° do poziomu. W modelu piły zastosowano dodatkowo obciążenie rozciągające wzdłuż osi x (skierowanej poziomo). Należy zaznaczyć, że optymalizacja uzyskana przy jednokrotnym stanie obciążenia może dać rezultat, który odznacza się zbyt dużą podatnością przy innym, możliwym do zaistnienia stanie obciążenia. Na rysunkach 8, 11 i 14 czarnymi liniami zaznaczona została siatka elementów skończonych. Na rysunkach 9, 12 i 15 przedstawione zostały rozkłady naprężeń przed optymalizacją, a na rysunkach 10, 13 i 16 - rozkłady naprężeń po optymalizacji. Wszystkie przytoczone w tym rozdziale rezultaty uzyskane zostały dla jednokrotnego stanu obciążenia i dla stałej objętości zęba lub taśmy.



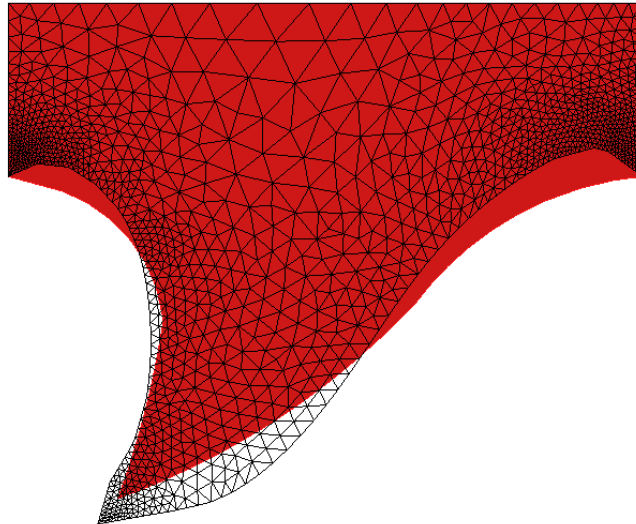
Rys. 8. Model zęba do metalu II typu. Czerwonym kolorem oznaczony jest kształt zęba przed optymalizacją. Czarna siatka - kształt po optymalizacji



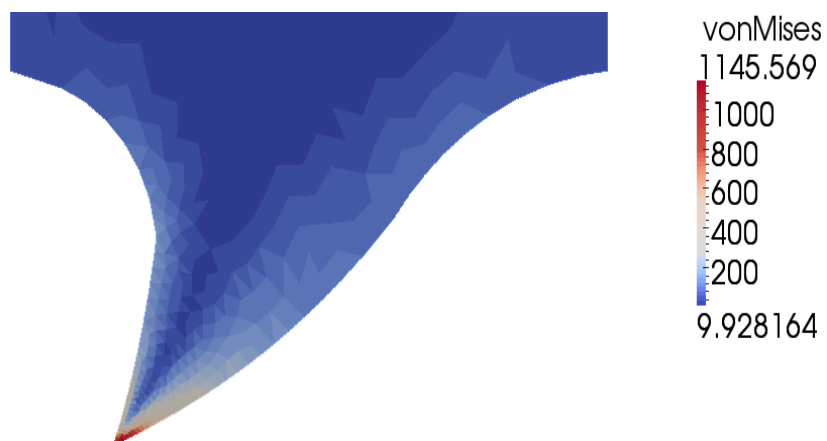
Rys. 9. Naprężenia zredukowane [MPa] w modelu zęba do metalu II typu przed optymalizacją



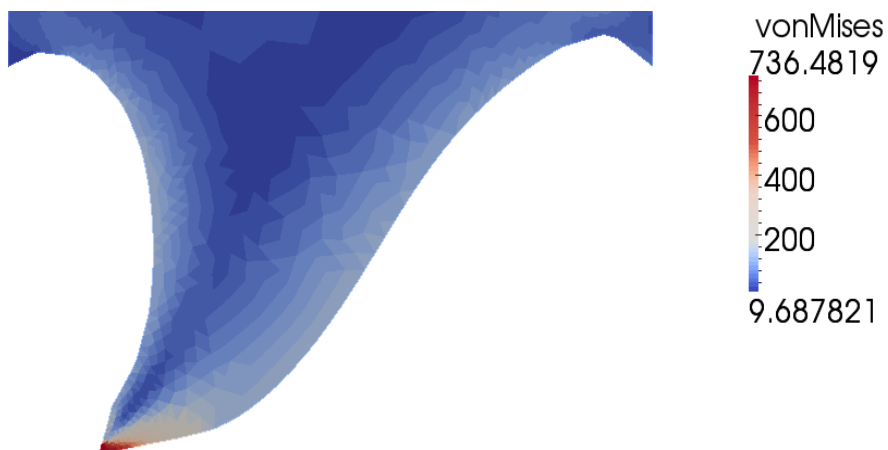
Rys. 10. Naprężenia zredukowane [MPa] w modelu zęba do metalu II typu po optymalizacji



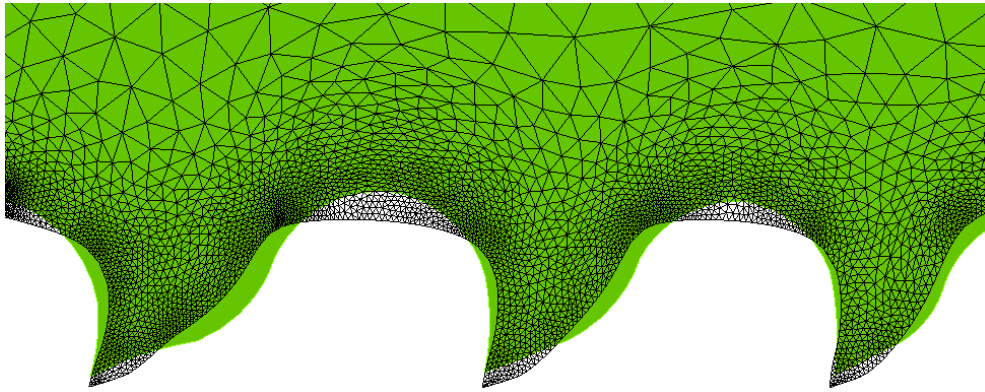
Rys. 11. Model zęba do metalu III typu. Czerwonym kolorem oznaczony jest kształt zęba przed optymalizacją. Czarna siatka - kształt po optymalizacji



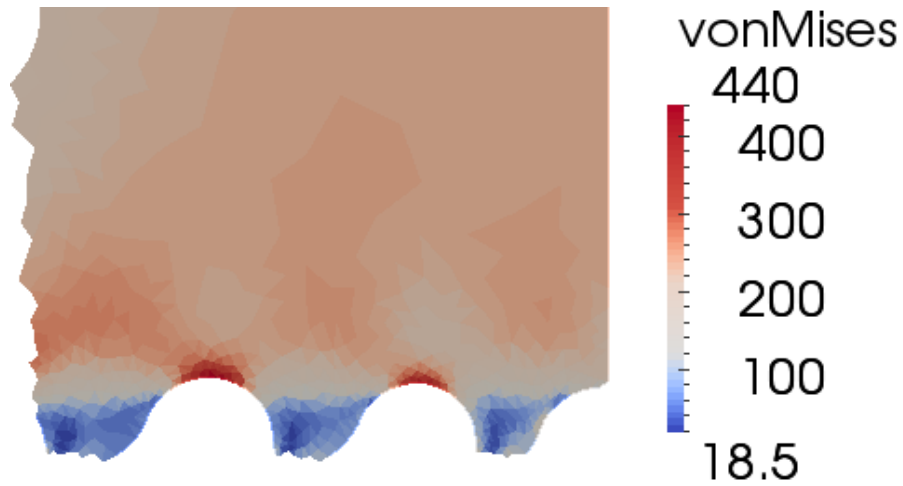
Rys. 12. Naprężenia zredukowane [MPa] w modelu zęba do metalu III typu przed optymalizacją



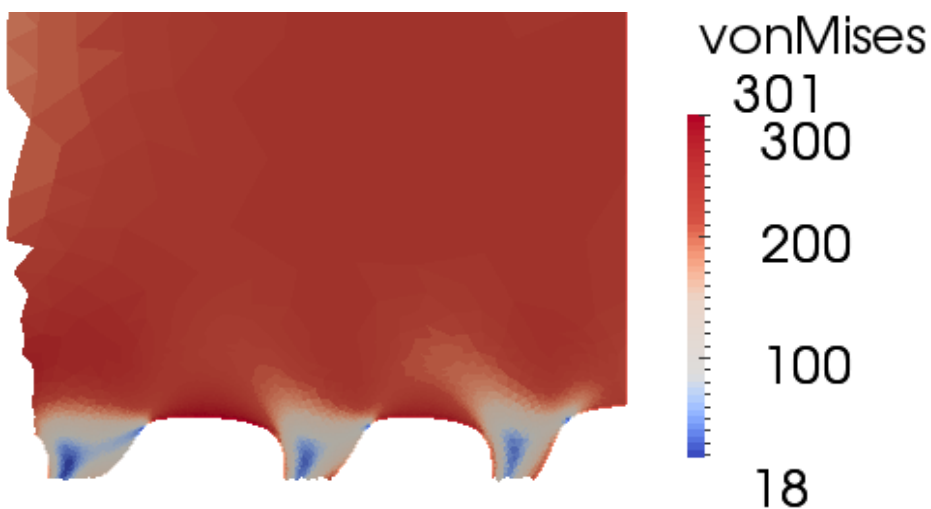
Rys. 13. Naprężenia zredukowane [MPa] w modelu zęba do metalu III typu po optymalizacji



Rys. 14. Model piły do metalu I typu. Zielonym kolorem oznaczony jest kształt taśmy przed optymalizacją. Czarna siatka – kształt po optymalizacji



Rys. 15. Naprężenia zredukowane [MPa] w taśmie piły do metalu I typu przed optymalizacją. Po ukryciu niektórych elementów skończonych, legenda została uaktualniona



Rys. 16. Naprężenia zredukowane [MPa] w taśmie piły do metalu I typu po optymalizacji. Po ukryciu niektórych elementów skończonych, legenda została uaktualniona

8. WNIOSKI

W pracy wykonano optymalizację kształtu zęba używając jako funkcji celu minimalizację pracy sprężystej konstrukcji zęba lub całej piły pod działaniem sił skrawania oraz sił napięcia wstępnego. Wg [3] zdefiniowanie warunku zbieżności dla algorytmu optymalizacji zastosowanego w niniejszej pracy jest trudne. W związku z tym zastosowano podejście ograniczające liczbę iteracji. Po 30 iteracjach kształt zęba nie ulegał już zmianom. Można było poprzez to uznać proces optymalizacji za zakończony.

W modelach zębów i piły kształt zęba po optymalizacji spełniał warunki wytrzymałościowe, jednakże nie spełniał warunków technologicznych dla cięcia. Na przykład ząb miał zaokrąglony wierzchołek lub taśma była wygładzona w miejscu, gdzie powinny być zęby. W tych przypadkach wybierany był rezultat z wcześniejszych iteracji, w których kształt zęba spełniał wymagania technologiczne oraz spełniał kryteria wytrzymałościowe (odznaczał się znacznym spadkiem maksymalnych naprężeń zredukowanych). Uzyskane kształty zębów, choć spełniają kryteria wytrzymałościowe, mogą np. niewłaściwie usuwać wióry. Dla optymalizacji kształtu trudno jest zdefiniować warunek, w wyniku którego można otrzymać wytrzymały ząb odpowiednio odprowadzający wióry. Uzyskane rezultaty mogą być traktowane jedynie jako wytyczne przy projektowaniu kształtów zęba i powinny być zweryfikowane eksperymentalnie.

Podczas optymalizacji z przyrostem materiału dla piły, zaobserwowano przyrost szerokości taśmy bez znacznych zmian kształtu zębów. Jest to spowodowane tym, że konstrukcja piły wykonuje znacznie większą pracę pod działaniem sił rozciągających niż przy obciążeniach zębów.

We wszystkich zaprezentowanych rezultatach uzyskano znaczny spadek maksymalnych naprężeń zredukowanych, maksymalnie o 440 MPa.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Hecht F., Pironneau O., Le Hyaric A., Ohtsuka K., *FreeFem++ Manual*, <http://www.freefem.org>
- [2] Henderson A., Ahrens J., Law C.: *The ParaView Guide*, Clifton Park, NY, Published by Kitware Inc., 2004.
- [3] Allaire G., Pantz O.: *Structural Optimization with FreeFem++*, SMO, 32, pp. 173-181, 2006.
- [4] Allaire G.: *Shape Optimization by the homogenization method*. New York, Springer Verlag, 2001.
- [5] Allaire G.: *Conception optimale de structures*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2005.
- [6] Allaire G., Jouve F., Toader A. –M.: *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, J. Comp. Phys. Vol 194/1, pp. 363-393, 2004.
- [7] Pironneau O.: *Optimal shape design for elliptic systems*. New York, Springer-Verlag, 1984.
- [8] Sokołowski J., Zolesio J. P., *Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 10, Berlin, Springer, 1992.