

Prof. dr hab. inż. arch. Janusz RĘBIELAK  
Politechnika Krakowska

## METODA OBLICZANIA KRATOWNIC STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH W DWÓCH ETAPACH

*Streszczenie: Przedmiotem pracy jest dwuetapowa metoda obliczeń kratownic płaskich statycznie niewyznaczalnych, którą autor zdefiniował podczas wstępnych obliczeń pewnej grupy struktur przestrzennych, uprzednio także opracowanych przez niego. W metodzie tej zastosowano zasadę superpozycji w stosunku do schematów statycznych kratownic oraz wyników obliczeń uzyskanych w każdym z etapów. Jej istotą jest odpowiednie redukcowanie liczby prętów podstawowej postaci kratownicy statycznie niewyznaczalnej tak, aby dla każdego z dwóch kolejnych etapów uzyskiwać kratownice statycznie wyznaczalne, dla obliczenia sił, w prętach których można zastosować np. metodę Cremony lub metodę Rittera. Stosując ogólne warunki równowagi oraz odpowiednio zasadę superpozycji, można łatwo i prosto obliczyć zbliżone wartości sił działających w kratownicy o schemacie wyjściowym. Proponowana metoda dwuetapowa daje wyniki przybliżone, ponieważ w każdym z etapów obliczana jest kratownica statycznie wyznaczalna i w tych procesach nie uwzględnia się stosunku sztywności prętów łączących się w poszczególnych węzłach.*

## METHOD OF CALCULATION OF STATICALLY INDETERMINATE TRUSSES IN TWO STAGES

*Abstract: The subject of the paper is a two-stage method of calculation of the plane statically indeterminate trusses, which the author has defined during initial calculations of a certain group of the spatial structures previously also worked out by himself. The method applies a principle of the superposition regarding the static schemes of the trusses as well as the calculation results obtained in each of its stages. The essential point of this method is an appropriate cancellation of a certain number of members from the basic truss, due to which in each stage is considered a statically determinate truss, for needs of the force values calculation acting in its members can be applied e.g. the Cremona's method or the Ritter's method. Taking into consideration the general conditions of equilibrium together with appropriately applied principle of the superposition one can easy and fast calculate approximate values of forces acting in the truss of the initial scheme. The proposed method gives the approximate results because in each of its stages there is calculated a statically determinate truss and in these processes are not taken into consideration ratios of stiffness of members connected to the particular nodes.*

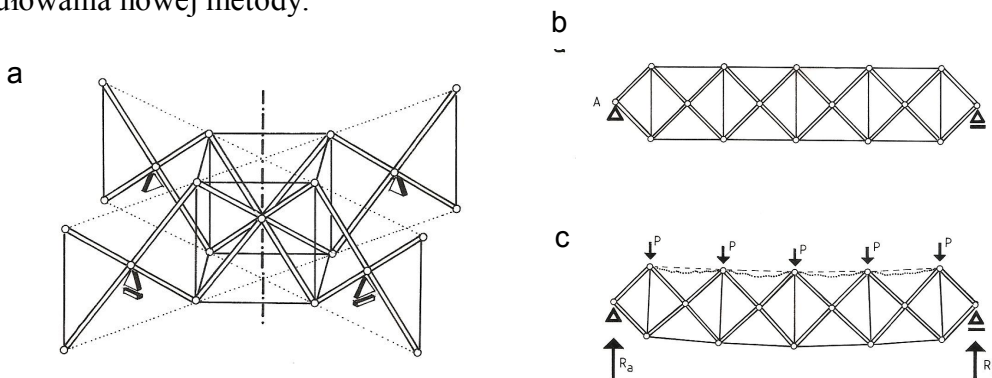
*Słowa kluczowe: obliczanie kratownic płaskich, metody obliczeń*  
*Keywords: calculation of prefabricated planar, calculation methods*

## 1. WPROWADZENIE

Prezentowana metoda została opracowana przez autora wiele lat temu [1] podczas wstępnych obliczeń statycznych grupy przestrzennych struktur prętowo-ciężnowych [2]. Wyniki tych analiz [3] były pomocne w kształtowaniu innych rodzajów systemów konstrukcyjnych [4, 5].

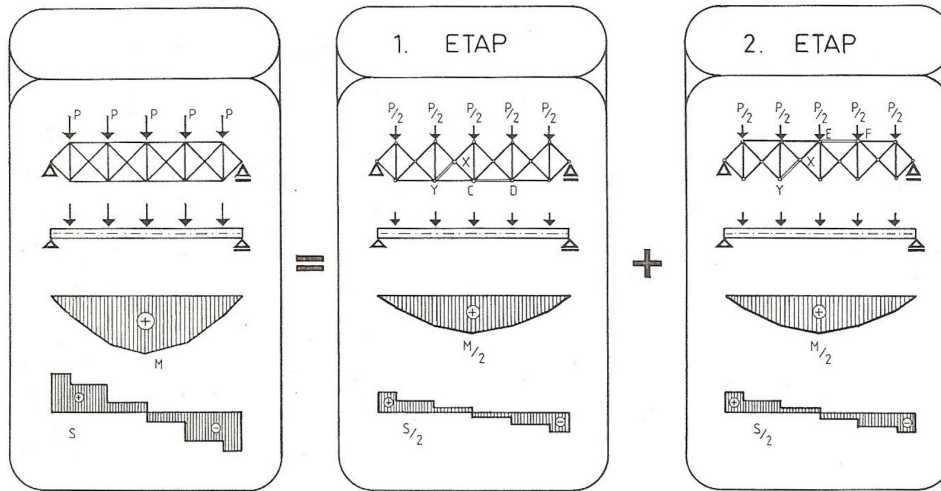
## 2. KONCEPCJA DWUETAPOWEJ METODY OBLICZEŃ STATYCZNYCH

W przestrzeniach wspomnianej grupy struktur krzyżulce usytuowane w warstwach pośrednich były prętami sztywnymi, natomiast elementy pionowe oraz znajdujące się w poziomych warstwach zewnętrznych zaprojektowano jako pręty wiotkie, rys. 1a. Warunkiem koniecznym dla prawidłowego ich funkcjonowania jest odpowiednie wstępne sprężenie. Proces obliczeń statycznych takich konstrukcji jest dość złożony. Uproszczony schemat płaskiego przekroju poprzecznego tej grupy struktur pokazano na rys. 1b. Jeśli kratownica płaska statycznie niewyznaczalna o takim schemacie i układzie elementów składowych będzie nadmiernie obciążona, wówczas można zauważyć, że elementy tworzące pas górny nie będą przenosić sił, por. rys. 1c, a uzyskany obraz odpowiada schematowi płaskiej kratownicy statycznie wyznaczalnej. Ten prosty fakt stał się podstawą dla sformułowania nowej metody.



Rys. 1. a) Schemat przestrzennej budowy badanej grupy struktur prętowo-ciężnowych, b) uproszczony schemat systemu kratownicowego, c) odkształcenia tego systemu poddanego nadmiernemu obciążeniu

Istotą proponowanej metody jest wyróżnienie dla rozpatrywanej kratownicy statycznie niewyznaczalnej dwóch pośrednich schematów kratownicy statycznie wyznaczalnych, których układ można uzyskać poprzez np. redukcję w pierwszym etapie prętów pasa górnego, a w drugim etapie usunięcie prętów pasa dolnego. Z ogólnych warunków równowagi wynika, że kratownice pośrednie w każdym z dwóch etapów obliczeń muszą być obciążone połową wartości sił przyłożonych do stosownych węzłów kratownicy podstawowej, będącej układem statycznie niewyznaczalnym, rys. 2.

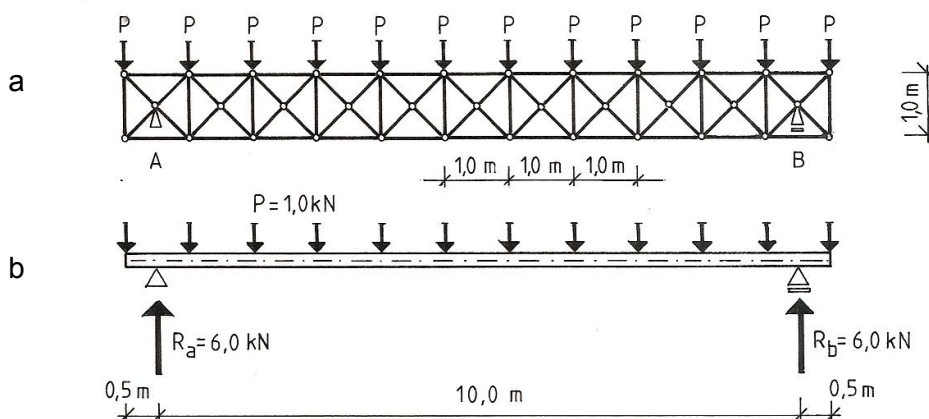


Rys. 2. Schematy ogólne procedury postępowania w proponowanej dwuetapowej metodzie obliczania kratownic płaskich statycznie niewyznaczalnych

Dzięki temu można zastosować w etapach pośrednich jedną z metod używanych dla rozwiązywania kratownic statycznie wyznaczalnych, którymi mogą być metoda Cremony, metoda Rittera lub też np. metoda Culmanna [6-8]. Wartości sił uzyskane w każdym z etapów rozwiązania dla odpowiednich prętów kratownic pośrednich będą zsumowane ze sobą i dadzą wynik końcowy całości obliczeń statycznych. Jest oczywiste, że wartości sił występujących w prętach pasa dolnego pozostaną takie same jak wyliczone w etapie pierwszym, tj. np. tak jak dla pręta CD, por. rys. 2. Natomiast wielkości sił działających w krzyżulcach będą sumarycznymi wartościami sił wyliczonych np. dla krzyżulca XY w pierwszym oraz w drugim etapie. Ponieważ w procesach obliczeń kratownic statycznie wyznaczalnych nie uwzględnia się wpływu sztywności łączących się w węzłach prętów, wyniki uzyskane proponowaną drogą należy uznać za przybliżone. Stopień dokładności tej dwuetapowej metody obliczeń statycznych może być poznany na przykładzie porównania wielkości sił w tych samych prętach takiej samej kratownicy wyliczonych tą metodą oraz jedną z metod, np. metodą sił, metodą przemieszczeń bądź innym sposobem [8, 9].

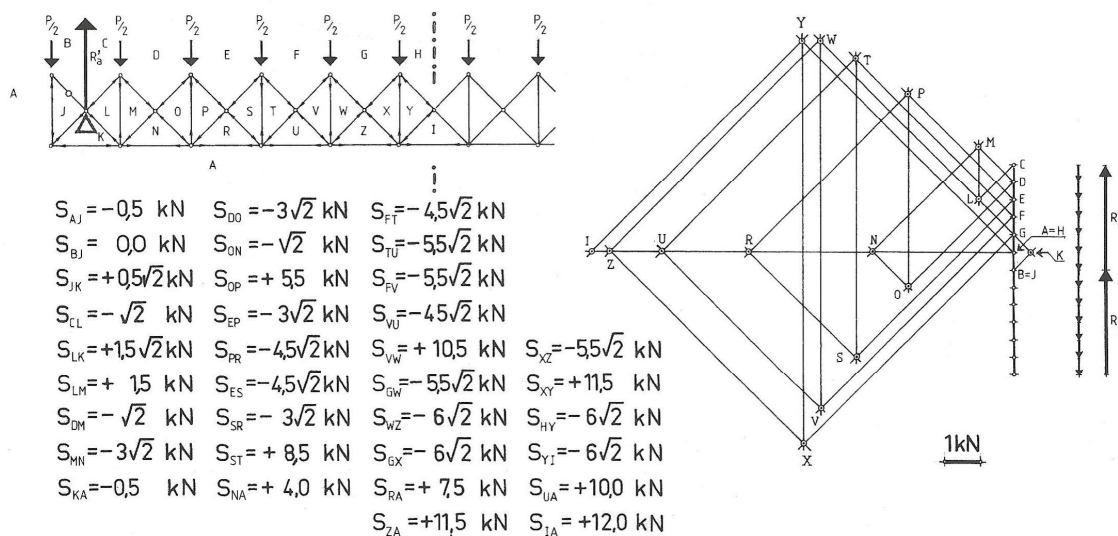
### 3. PORÓWNANIE REZULTATÓW PRZYKŁADOWYCH OBLICZEŃ

Dla wspomnianych wyżej celów przeprowadzono stosowne obliczenia statyczne dla przykładowej kratownicy płaskiej o pasach równoległych obciążonej jednostkowymi wartościami sił  $P = 1,0 \text{ kN}$ , które zostały przyłożone w węzłach pasa górnego tak, jak to pokazano na rys. 3a. Odpowiadający jej schemat belki wolno podpartej o takich samych warunkach obciążenia i podparcia oraz rozpiętości pokazano na rys. 3b.



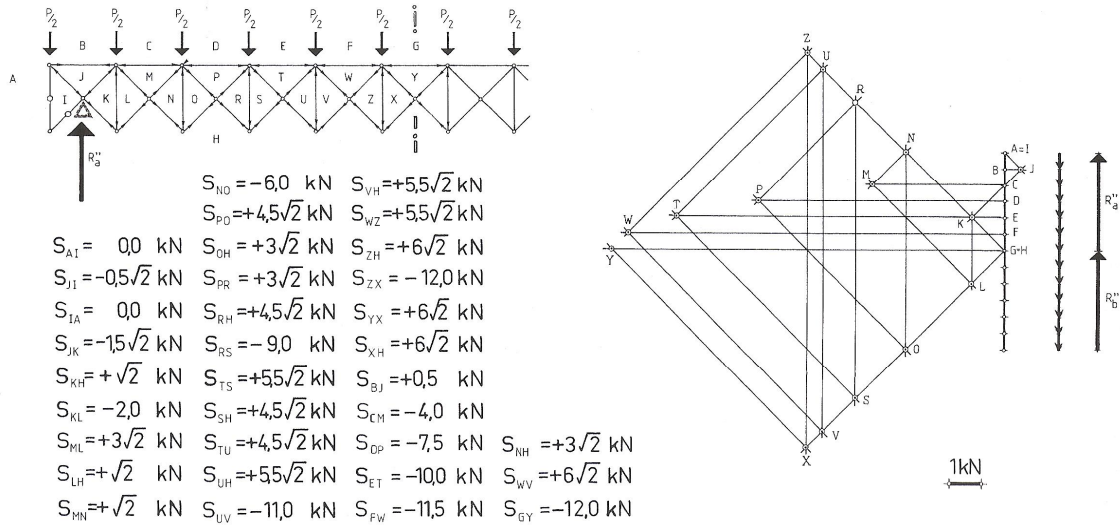
Rys. 3. a) Schemat przykładowej postaci kratownicy płaskiej statycznie niewyznaczalnej, b) schemat belki wolno podpartej odpowiadający badanej kratownicy

Rozpiętość tej kratownicy w świetle podpór jest niewielka i wynosi 10,00 metrów, a jej wysokość konstrukcyjną przyjęto równą 1,00 metr dla zapewnienia kwadratowej postaci jej powtarzalnego modułu. Kratownica jest podparta w skrajnych węzłach środkowych, w których w każdym z nich łączą się odpowiednio cztery jej krzyżulce. Jest ona utworzona z liczby  $p = 78$  prętów połączonych ze sobą za pomocą liczby  $w = 35$  węzłów, zatem stosując podstawowy wzór na określenie wewnętrznej statycznej wyznaczalności ( $p = 2w - 3$ ) [6, 7] można stwierdzić, że jest ona ( $78 > 2 \times 35 - 3$ ) 11-krotnie wewnętrznie statycznie niewyznaczalna. Stosując zasady proponowanej metody, w jej pierwszym etapie usunięto 11 prętów z pasa górnego kratownicy podstawowej i uczyniono ją tym samym kratownicą statycznie wyznaczalną. Wartości sił w prętach takiej kratownicy obliczono, stosując metodę Cremony. Ponieważ kratownica podstawowa jest symetryczna, a ponadto jest ona w sposób symetryczny obciążona, proces koniecznych obliczeń przeprowadzono jedynie dla symetrycznej połówki każdej z kratownic. Schemat postępowania wraz z tzw. planem Cremony oraz zbiorczymi wynikami liczbowymi uzyskanymi w pierwszym etapie obliczeń dla połówki pierwszej kratownicy przedstawiono na rys. 4.



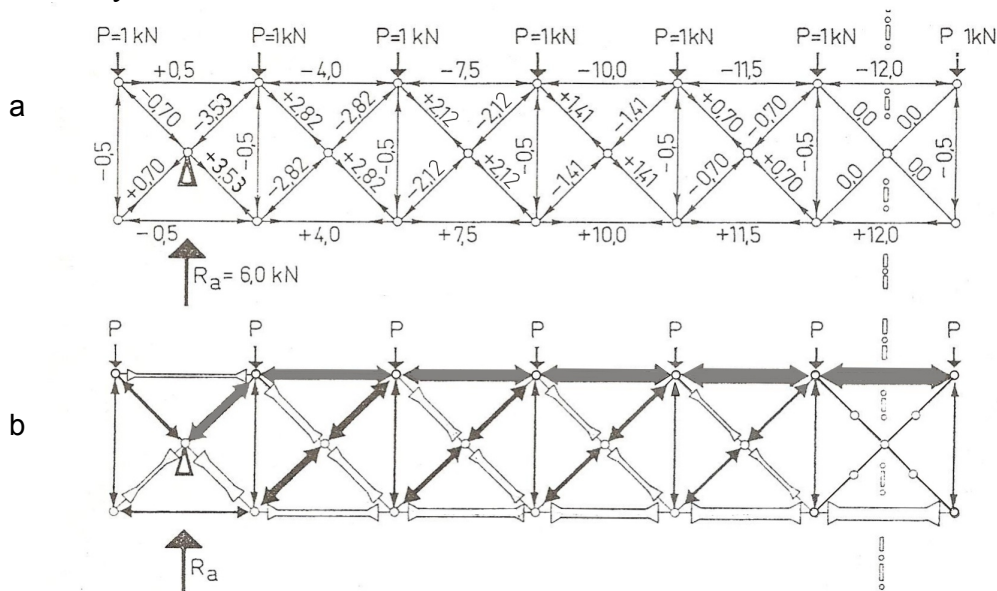
Rys. 4. Schemat symetrycznej części kratownicy obliczanej w pierwszym etapie wraz ze stosowną częścią planu Cremony i wielkościami sił działających w stosownych jej prętach

W sposób podobny przedstawiono na rys. 5 schemat statyczny kratownicy, uzyskanej po usunięciu 11 prętów – tym razem z pasa dolnego. Pokazano tu również stosowną część planu Cremony wraz z wielkościami sił działających w tej symetrycznej połówce kratownicy.



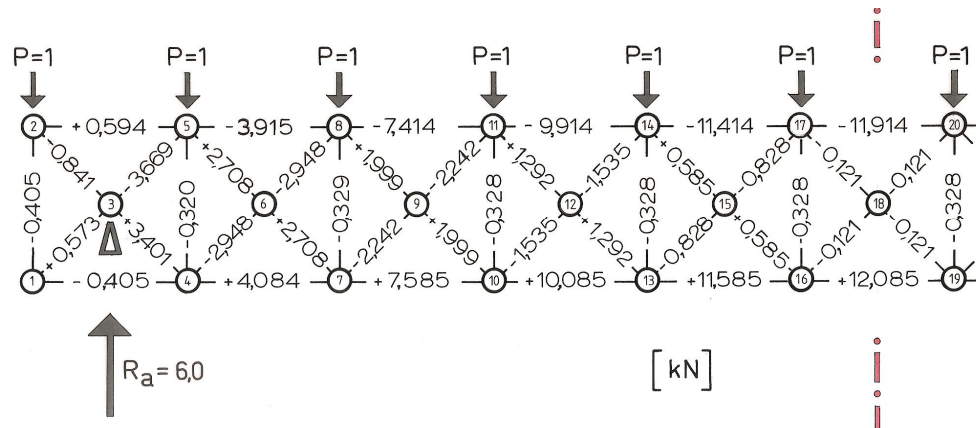
Rys. 5. Schemat symetrycznej części kratownicy obliczanej w drugim etapie wraz z odpowiednią częścią planu Cremony i wielkościami sił działających w odpowiednich jej prętach

Stosując zasadę superpozycji, należy zsumować wartości sił uzyskane w tych dwóch etapach dla każdego pręta. Pręty pasów zewnętrznych usunięte w danym etapie nie biorą wtedy udziału w przekazywaniu sił, dlatego przyjmuje się, iż w takim przypadku są poddane działaniu sił zerowych. Wartości sił w prętach tych pasów są uzyskiwane osobno w każdym etapie obliczeń. Wielkości sił działających w poszczególnych prętach rozważanej kratownicy wraz z plastyczną prezentacją ich rozmieszczenia w symetrycznej połówce kratownicy pokazano na rys. 6.



Rys. 6. a) Wielkości sił działających w prętach symetrycznej części kratownicy płaskiej statycznie niewyznaczalnej obliczone za pomocą proponowanej metody dwuetapowej, b) schemat rozmieszczenia wielkości sił w prętach badanej kratownicy

Kratownica statycznie niewyznaczalna o tej samej rozpiętości, obciążona i podparta w identyczny sposób, była przedmiotem obliczeń statycznych wykonanych techniką komputerową z zastosowaniem odpowiedniego oprogramowania uwzględniającego własności takich systemów. Przyjęto, że wszystkie pręty są wykonane ze stali i mają ten sam przekrój poprzeczny na całej swej długości [1, 3]. Rezultaty tych obliczeń przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. Wyniki obliczeń statycznych tej samej kratownicy uzyskane techniką komputerową

Porównując wielkości sił działających w tych samych prętach, ale uzyskane w odmiennych metodach obliczeń, można zauważyć pewne różnice. Biorąc jednak pod uwagę względną różnicę wartości sił, należy stwierdzić, że rezultaty otrzymane proponowaną metodą dwuetapową są w rozpatrywanym przypadku kratownicy procentowo bardzo niewielkie. Dlatego ta dwuetapowa metoda rozwiązywania kratownic statycznie niewyznaczalnych może z pewnością być bardzo przydatna we wstępnej fazie projektowania tego rodzaju systemów konstrukcyjnych.

#### 4. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Proponowana dwuetapowa metoda obliczania kratownic statycznie niewyznaczalnych daje w wyniku przybliżone wielkości sił działających w ich prętach. To przybliżone rozwiązanie jest uzyskane znacznie mniejszym nakładem koniecznych do wykonania operacji obliczeniowych niż jest to wymagane w metodach dokładnych. Skala dokładności tej metody może być znacząco zwiększona, jeśli jej procedura zostanie uzupełniona o protokoły uwzględniające wzajemne stosunki sztywności prętów łączących się w poszczególnych węzłach kratownicy. Struktura tej metody może być stosunkowo łatwo adaptowana na potrzeby procesów numerycznych i po uwzględnieniu wspomnianych postulatów może być metodą konkurencyjną do metod uznawanych obecnie za dokładne w procesach wyznaczania sił w elementach składowych systemów statycznie niewyznaczalnych.

#### LITERATURA

- [1] Rębielak J.: *Dwuetapowa metoda obliczania kratownic statycznie niewyznaczalnych*, TH Delft, Afdeling der Bouwkunde, Vakgroep 4, Project nr 4.1.2.1, March, 1985.
- [2] Rębielak J.: *Przestrzenne struktury prętowo-ciężnowe. Konstrukcje nośne przekryć powłokowych*, Część 1, Architektura, nr 1, 1983, s. 69-70, Część 2, Architektura, nr 2, 1983, s. 69-70.

- [3] Rębielak J., Beranek W.J., Hobbelman G.J.: *Wielowarstwowe struktury przestrzenne. Zagadnienia statyczne i geometryczne*, TH Delft, Afdeling der Bouwkunde, Vakgroep 4, UII – 396, September 1985, Raport Instytutu Architektury i Urbanistyki Politechniki Wrocławskiej, Nr I-1/P-332/1985.
- [4] Rębielak J.: *Struktura quasi-przestrzenna*, [w:] *Aktualne problemy badawczo-rozwojowe budownictwa*, Materiały XXXIII Konferencji Naukowej KILiW PAN i Komitetu Nauki PZITB, Krynica 21-27 września 1987, tom 1, Teoria konstrukcji, Gliwice, 1987, s. 103-108.
- [5] Rębielak J.: *A method of static calculation and shape of structural system developed by application of principles of superposition*, Lightweight structures in civil engineering – contemporary problems, Local seminar of IASS Polish Chapter, Warsaw, 7 December, 2012, s. 155-158.
- [6] Kolendowicz T.: *Mechanika budowli dla architektów*, Arkady, Warszawa, 1993.
- [7] Allen E., Zalewski W. and Boston Structures Group: *Form and Forces. Designing efficient, expressive structures*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010.
- [8] Timoshenko S.P.: *Historia wytrzymałości materiałów*, Arkady, Warszawa, 1966.
- [9] Makowski Z.S.: *Analysis, design and construction of double-layer grids*, Applied Science Publishers, London, 1981.

